

1971

FAKTORANALYS VID PARTIELLT OFULLSTÄNDIGA DATA

MATS HAGNELL

UNIVERSITY OF LUND
INSTITUTE OF STATISTICS



FAKTORANALYS VID PARTIELLT OFULLSTÄNDIGA DATA

Akademisk avhandling, som med vederbörligt tillstånd av Samhällsvetenskapliga Fakulteten vid Lunds Universitet för vinnande av filosofie doktorsexamen framlägges till offentlig granskning å Getingevägen 8, sal 26, lördagen den 16 oktober 1971 kl 10.00.

Mats Hagnell

Fil.mag.

Ld

FÖRORD

Under arbetet med denna avhandling har min lärare, professor Carl-Erik Quensel bistått mig med värdefulla råd, och under hans ledning har det högre statistiska seminariet vid Statistiska institutionen i Lund diskuterat delar av avhandlingen. Jag är skyldig professor Quensel ett varmt tack för detta och för hans vänliga uppmuntran av mitt arbete.

Vid mina studier vid Statistiska institutionen i Uppsala kom jag i kontakt med de av professor Herman Wold utvecklade NIPLAS-(Non linear Iterative Partial Least Square) metoderna. Professor Wolds arbete med dessa metoder gav mig impulsen att påbörja arbetet med denna avhandling.

Jag vill också tacka docent Anders Christoffersson vid Statistiska institutionen i Uppsala för givande diskussioner och många värdefulla påpekanden.

F.L. Per Dahmström och F.K. Bo Gullberg har varit vänliga att granska manuskriptet och därvid kommit med många synpunkter.

Lund, september 1971

Mats Hagnell

unter anderem auch durch die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der

Wie eine solche eine
sich in der letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der

Wie eine solche eine
sich in der letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der



Wie eine solche eine
sich in der letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der
letzten Zeit des Jahres 1899
hervorgebrachte, die in der

Wie eine solche eine

Wie eine solche eine

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sid
1 Inledning	1
2 Teoretisk modell	5
3 Skattning med fullständiga data	11
4 Skattning med ofullständiga data	16
5 Asymptotiska egenskaper hos skattningarna	20
5.1 Första ordningens derivator	24
5.2 Andra ordningens derivator	27
5.3 Konsistens	33
5.4 Asymptotisk kovariansmatris och asymptotisk normalitet	35
5.5 Konvergens för den iterativa proceduren	38
5.6 Asymptotisk fördelning för residualkvadratsumman	38
5.7 Skattning av asymptotisk kovariansmatris för laddningar	43
6 Monte-Carloexperiment	46
6.1 Experiment 1	46
6.2 Experiment 2	49
6.3 Experiment 3	50
Tabeller	53
Summary	77
Referenser	80

Digitized by the Internet Archive
in 2026

1 INLEDNING

Faktoranalys är en ofta använd statistisk metod inom samhällsvetenskaperna, speciellt inom psykologin. I faktoranalys antas att de observerade variablerna, eller testvariablerna med psykologiskt språkbruk, till största delen kan förklaras av ett mindre antal för testen gemensamma bakomliggande variabler, s k faktorer. De delar av testvariablerna, som inte förklaras av faktorerna, antas vara slumpkomponenter. Dessa slumpkomponenter förutsättes vara oberoende av varandra och av faktorerna.

Vi ska i detta arbete behandla faktoranalys med ofullständiga data. Data är här multivariata, bestående av observationer på flera variabler för samma individ. I praktiken är multivariata data ofta partiellt ofullständiga, dvs det saknas observationer på några av de undersökta variablerna för vissa individer. Med viss förenkling kan man urskilja tre olika fall av partiellt ofullständiga data. Det första fallet är, då det från praktiska utgångspunkter är omöjligt att få data för alla variabler för varje individ, eftersom bestämningen av ett data omöjliggör bestämningen av ett annat data för samma individ. Bortfallet kan här ofta vara beroende av individens egenskaper. Ett exempel är betygen i ett differentierat gymnasium, där eleven får välja en viss linje. Samtliga elever läser vissa ämnen, medan andra ämnen endast läses på en viss linje. Det andra fallet är när bortfallet är rent slumpmässigt, oberoende av individens egenskaper och oberoende av individens resultat på övriga test. Ett exempel är proven under ett skolar där en elev på grund av sjukdom och andra omständigheter kan missa vissa prov. Det tredje fallet är när observationsvariablerna utgöres av successiva prov, där samtliga individer i undersökningen deltar i det första provet. På grund av låga värden i det första provet faller ett antal individer bort. Efter det andra provet faller ytterligare individer bort på grund av sina

resultat i det första och andra provet, osv. Detta fall, då bortfallet är beroende av resultat på tidigare prov, kommer dock inte att behandlas i detta arbete.

Faktoranalys med ofullständiga data har tidigare behandlats på en del olika sätt. Det enklaste sättet är att utesluta alla individer med ofullständiga data från analysen. Nackdelen med detta förfarande är att vid stort bortfall kan det bli förhållandevis få individer kvar att analysera eller kanske inga alls. En annan enkel metod är att på de saknade observationernas plats sätta in medelvärdena för motsvarande testvariabler (se t ex Wold (1966)). Detta tillvägagångssätt medför emellertid att elementen i kovariansmatrisen för testvariablerna underskattas. Ett bättre sätt är att skatta kovariansen mellan två testvariabler genom att använda endast de för de två testvariablerna gemensamma individerna och sedan fortsätta analysen som vid fullständiga data (se t ex Veldman (1967)). Men det kan vid detta förfarande finnas kovarianser som skattas endast från ett fåtal individer om bortfallet är stort. Det kan t o m inträffa att någon kovarians inte alls kan skattas. Om bortfallet har ett samband med faktorerna, t ex om det för några testvariabler saknas observationer med höga faktorvärden och för andra observationer med låga faktorvärden, så kan detta leda till inkonsistenta skattningar. Ytterligare några metoder för faktoranalys vid ofullständiga data finns beskrivna i Horst(1965). Emellertid förutsätter dessa metoder fullständiga data för några av testvariablerna.

Eftersom de flesta metoder för faktoranalys utgår från kovariansmatrisen för testvariablerna, har problemet med ofullständiga data i faktoranalys ett samband med problemet att skatta kovariansmatrisen vid ofullständig datamatrix. De ovan angivna metoderna illustrerar detta samband i en riktning, då idén bakom dessa är

att på något sätt skatta kovariansmatrisen för testvariablerna och sedan använda kända metoder för faktoranalysen. Omvänt är det möjligt att en metod för faktoranalys vid ofullständiga data, som bygger på faktoranalysmodellen, kan vara användbar för att skatta kovariansmatrisen vid ofullständig datamatrix, speciellt när få eller inga fullständiga observationsvektorer föreligger. Detta föreslås som ett alternativ i Timm (1970) i en översikt av olika metoder för skattning av kovariansmatrisen vid ofullständiga data. Synpunkterna ovan torde även vara relevanta för problemet att skatta de saknade observationerna.

Specialfallet med ofullständiga data för faktormodellen med endast en faktor har tidigare ingående behandlats av Christoffersson (1970b), där flerfaktorfallet också kortfattat diskuteras i avslutningskapitlet.¹⁾ Syftet med föreliggande arbete är att något utförligare behandla flerfaktormodellen med partiellt ofullständiga data. Vi skall använda oss av samma angreppssätt som i enfaktorfallet och speciellt göra samma antagande om de saknade observationerna, att de saknade observationerna överensstämmer med vår modell. Det visar sig att resultaten från enfaktorfallet i stort sett kan generaliseras till flerfaktorfallet, ibland omedelbart. För att på ett enkelt sätt ta hänsyn till de speciella problem som finns i flerfaktorfallet har en transformation i Wold (1966) utnyttjats.

I det följande visas en metod för att skatta parametrarna, i första hand faktorladdningarna, i flerfaktormodellen med lika residualvarianser och kända lägesparametrar. I kapitel 2 redogörs för den teoretiska modellen. Skattning med fullständiga data behandlas i kapitel 3 och skattning med ofullständiga data i kapitel 4.

1) Christoffersson (1970a) har senare också behandlat flerfaktorfallet. Hans resultat står i nära överensstämmelse med dem som presenteras här.

De asymptotiska egenskaperna hos skattningarna presenteras i kapitel 5. I kapitel 6 redogörs för resultaten av Monte-Carloförsök.

2 TEORETISK MODELL

Det grundläggande antagandet i faktoranalys är, att de observerade, eller manifesta, variablerna kan uttryckas som lineära funktioner av ett antal latent variabler, eller faktorer, plus en residual, där antalet faktorer är betydligt mindre än antalet variabler. Vikterna i lineärkombinationerna kallas för faktorladdningar. Ofta kallas de observerade variablerna för test, då faktoranalysens viktigaste användning har varit inom psykologin. För en utförlig översikt av de statistiska problemen inom faktoranalysen, se t ex Anderson och Rubin (1956).

Följande beteckningar kommer att användas för att definiera flerfaktormodellen:

p = antalet testvariabler

k = antalet faktorer

η_i = testvariabel i

μ_j = faktor j

γ_{ij} = faktorladdning för test i på faktor j

ϵ_i = residual i test i

Vi definierar flerfaktormodellen med k faktorer på följande sätt. De p stokastiska variablerna η_i kan uttryckas som

$$\eta_1 = \gamma_{11}\mu_1 + \dots + \gamma_{1k}\mu_k + \epsilon_1$$

$$(1) \quad \eta_2 = \gamma_{21}\mu_1 + \dots + \gamma_{2k}\mu_k + \epsilon_2$$

.

.

.

$$\eta_p = \gamma_{p1}\mu_1 + \dots + \gamma_{pk}\mu_k + \epsilon_p$$

Vi behöver också följande beteckningar:

Vektorerna

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_p \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

och matrisen av faktorladdningar

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pk} \end{pmatrix}$$

Då kan vi mera kompakt skriva k-faktormodellen som:

$$(2) \quad \underline{\eta} = \Gamma \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}$$

Residualerna antar vi vara normalfördelade, ha väntevärden noll och vara okorrelerade, dvs

$$(3) \quad E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$$

$$(4) \quad E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \text{ är diagonal}$$

Dessutom antar man i faktoranalys, att faktorerna är oberoende av residualerna, vilket medför

$$(5) \quad E(\underline{\mu}\underline{\varepsilon}') \text{ är en nollmatris}$$

Tillsammans med antagandet att Γ har rang k , $k < p$, specificerar antagandena (2), (3), (4) och (5) den generella k -faktormodellen. Vi gör nu ytterligare antagandet att residualvarianserna är lika. I fortsättningen behandlar vi bara k -faktormodellen med lika residualvarianser och (4) ersättes med

$$(6) \quad E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I$$

där I är enhetsmatrisen.

Faktorerna antas vara antingen stokastiska eller icke-stokastiska, varierande från individ till individ. Vi inför beteckningen Φ , där

$$(7a) \quad \Phi = E(\underline{\mu}\underline{\mu}')$$

om faktorerna är stokastiska, och

$$(7b) \quad \Phi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{\mu}_j \underline{\mu}_j'$$

om faktorerna är icke-stokastiska. $\underline{\mu}_j$ betecknar faktorvärdena för

j:te individen och n är antalet individer.

Vi gör nu transformationen

$$(8) \quad \underline{\mu}^* = T\underline{\mu}$$

$$(9) \quad \Gamma^* = \Gamma T^{-1}$$

där T är en godtycklig fix icke-singulär $|k \times k|$ -matris. Om vi sätter in (8) och (9) i högra ledet av ekv (2) fås

$$(10) \quad \underline{n} = \Gamma^* \underline{\mu}^* + \underline{\varepsilon}$$

Ekv (2) blir oförändrad av transformationerna (8) och (9).

k -faktormodellen är alltså obestämd på en icke-singulär $[k \times k]$ -matris när, ett faktum som sedan länge är välbekant (se t ex Jöreskog (1963)).

Denna obestämdhet i modellen försvinner om man pålägger vissa restriktioner. Den vanligaste restriktionen torde vara att kräva $\Phi = I$. Då säges faktorerna vara ortogonala. I det fallet är modellen unik, så när som på en ortogonal matris. Denna sista obestämdhet ger upphov till det s k rotationsproblemet inom faktoranalysen.

I Christofferson (1970 b) finns följande restriktioner i flerfaktorfallet: Φ diagonal och $\Gamma' \Gamma = I$. Dessa villkor, vilka gör flerfaktormodellen unik, är en direkt generalisering av Christofferssons villkor i enfaktorfallet. Emellertid är det svårt att med dessa restriktioner behandla faktoranalys med ofullständiga data (utom i specialfallet med endast en faktor). För att kunna behandla fallet med ofullständiga data skall vi här i stället följa Wold (1966), där följande restriktion föreslås

$$(11) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \Gamma_2^*$$

där

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k1} & \cdots & \gamma_{kk} \end{pmatrix}$$

och

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{k+1,1} & \cdots & \gamma_{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pk} \end{pmatrix}$$

Detta är alltid möjligt, för om vi har Γ med Γ_1 icke-singulär kan vi välja den tidigare omtalade transformationsmatrisen T som Γ_1 . Eftersom rangen för Γ är k , kan vi genom att ändra ordningen på variablerna i $\underline{n}$ få Γ_1 icke-singulär.

Restriktionen $\Gamma_1 = I$ ger k^2 restriktioner och vår modell är alltså unik med Wolds restriktion. Andra villkor på Γ är också tänkbara men Wolds torde vara de enklaste.

Efter transformationen kan modellen skrivas som (vi slopar nu beteckningen $*$ på $\underline{\mu}$ och Γ)

$$(12) \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} I \\ \Gamma \end{pmatrix} \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}$$

eller

$$(13) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}_1 \\ \eta_2 &= \Gamma \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}_2 \end{aligned}$$

där

$$\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{k+1} \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix}$$

och

$$\underline{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

För att få ett klarare skrivsätt byter vi nu beteckningar och skriver om (13) med $\underline{\xi}$ som $\underline{n}_1$, $\underline{\eta}$ som $\underline{n}_2$, $\underline{\delta}$ som $\underline{\varepsilon}_1$ och $\underline{\varepsilon}$ som $\underline{\varepsilon}_2$.

$$(14) \quad \begin{aligned} \underline{\xi} &= \underline{\mu} + \underline{\delta} \\ \underline{\eta} &= \Gamma \underline{\mu} + \underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

Om $\underline{\mu}$ elimineras, så får vi från (14)

$$(15) \quad \underline{\eta} = \Gamma(\underline{\xi} - \underline{\delta}) + \underline{\varepsilon}$$

(15) är en "errors-in-variables"-modell där $\underline{\eta}$ och $\underline{\xi}$ är variablerna som observeras och $\underline{\delta}$ och $\underline{\varepsilon}$ felen.

3 SKATTNING MED FULLSTÄNDIGA DATA

Som en introduktion till kapitel 4, där skattning med ofullständiga data behandlas, skall vi här betrakta fallet med fullständiga data.

Vi antar att vi får ett stickprov om n st. oberoende observationer på de p st. testvariablerna. Den teoretiska modellen för våra observationer fås då från (14):

$$y_{ij} = \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j} + \epsilon_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p-k \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \quad (16)$$

$$x_{rj} = \mu_{rj} + \delta_{rj} \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

där x_{rj} och y_{ij} betecknar j :te observationen på ξ_r resp η_j . δ_{rj} och ϵ_{ij} är här residualerna för x_{rj} resp y_{ij} . $\mu_{\ell j}$ är den ℓ :te faktorn i den j :te observationen.

Residualerna från olika observationer antas oberoende av varandra. Detta antagande, tillsammans med tidigare antaganden om residualerna, medför, att likelihoodfunktionen, L , blir

$$(17) \quad L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{np}{2}}} e^{-\frac{Q}{2\sigma^2}}$$

där Q är residualkvadratsumman

$$(18) \quad Q = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k \delta_{rj}^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} \epsilon_{ij}^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k (x_{rj} - \mu_{rj})^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j})^2$$

Vi söker nu maximum-likelihoodskattningar av parametrarna i modellen, dvs de skattningar som ger maximum av L .

Vi kan enklare få våra maximiskattningar genom att undersöka $\ell = \ln L$ där

$$(19) \quad \ell = -\frac{np}{2} \ln \sigma^2 - \frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{Q}{2\sigma^2}$$

Maximiskattningarna fås genom att nollställa de partiella derivatorna av ℓ och lösa det ekvationssystem som då uppkommer. De partiella derivatorna blir:

$$(20) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_{im}} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j}) \mu_{mj} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, p-k \\ m=1, \dots, k \end{matrix}$$

$$(21) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \mu_{rj}} = \frac{2}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j}) \gamma_{ir} + x_{rj} - \mu_{rj} \right) \quad \begin{matrix} r=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$(22) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{np}{2\sigma^2} + \frac{Q}{2\sigma^4}$$

För att få ett enklare skrivsätt inför vi beteckningarna

$$\underline{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{p-k,j} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{kj} \end{pmatrix}$$

för första resp andra delen av j :te observationsvektorn,

$$\underline{\mu}_j = \begin{pmatrix} \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{kj} \end{pmatrix}$$

för faktorerna i j :te observationen. Matrisen av faktorladdningar kan skrivas med hjälp av kolumnvektorerna som

$$\Gamma = (\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2, \dots, \underline{\gamma}_k)$$

Med ovan införda beteckningar kan (20), (21) och (22) skrivas som resp

$$(23) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \underline{\gamma}_m} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (\underline{y}_j - \Gamma \underline{\mu}_j) \mu_{mj} \quad m=1, \dots, k$$

$$(24) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \underline{\mu}_j} = \frac{2}{\sigma^2} (\Gamma' (\underline{y}_j - \Gamma \underline{\mu}_j) + \underline{x}_j - \underline{\mu}_j) \quad j=1, \dots, n$$

$$(25) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \sigma^2} = -\frac{np}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n [(\underline{x}_j - \underline{\mu}_j)'(\underline{x}_j - \underline{\mu}_j) + (\underline{y}_j - \Gamma \underline{\mu}_j)'(\underline{y}_j - \Gamma \underline{\mu}_j)]}{2\sigma^4}$$

Skattningarna av Γ , $\underline{\mu}_j$ och σ^2 kommer att betecknas med $G, \underline{X}_j$ resp s^2 . Nollsättning av (23), (24) och (25) ger följande ekvationer för skattningarna:

$$(26) \quad G \sum_{j=1}^n \underline{X}_j \underline{X}_j' = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \underline{X}_j'$$

$$(27) \quad (I+G'G)\underline{x}_j = \underline{x}_j + G'\underline{y}_j \quad j=1, \dots, n$$

$$(28) \quad s^2 = \frac{\sum_{j=1}^n [(\underline{x}_j - \underline{X}_j)'(\underline{x}_j - \underline{X}_j) + (\underline{y}_j - G\underline{X}_j)'(\underline{y}_j - G\underline{X}_j)]}{np}$$

Om vi inför matriserna x , y och X , där

$$y = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n)$$

$$x = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$$

$$\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$$

så kan (26), (27) och (28) skrivas som resp

$$(29) \quad GXX' = yX'$$

$$(30) \quad (I+G'G)X = x + G'y$$

$$(31) \quad s^2 = \frac{Sp(x-X)'(x-X) + Sp(y-GX)'(y-GX)}{np}$$

SpA betecknar här spåret av matrisen A, dvs summan av diagonal-elementen i A.

Ekvationerna (29) och (30) finns härledda i Wold (1966). Wold antar inte normalfördelning för residualerna utan använder minstakvadratmetoden. (29) och (30) är alltså också minsta-kvadratskattningar.

När man har fullständiga data, brukar man för att göra modellen unik oftast pålägga restriktionerna $E(\mu\mu') = nI$ och $r'r$ dia-

gonal (eller $E(\mu\mu')$ diagonal och $\Gamma'\Gamma=I$). μ är här matrisen bildad av μ_j , $j=1, \dots, n$, som kolumner. Dessa restriktioner ger maximum-likelihoodskattningar av faktorladdningarna, som är proportionella mot egenvektorererna till kovariansmatrisen för observationerna (se t ex Anderson-Rubin (1956)). Maximiskattningarna av faktorladdningarna med Wolds villkor fås från de komplicerade icke-lineära ekvationerna (29) och (30). Det är troligt att från numerisk synpunkt är ett egenvektorsproblem betydligt enklare att behandla än ekvationerna (29) och (30). Vi drar alltså den slutsatsen att i fallet med fullständiga data är användningen av Wolds villkor inte särskilt intressant. Däremot i fallet med ofullständiga data, som behandlas i nästa kapitel, torde Wolds restriktion vara nödvändig för att få skattningar med önskvärda egenskaper.

4 SKATTNING MED OFULLSTÄNDIGA DATA

För att på ett enkelt sätt kunna beteckna vilka data som saknas inför vi indikatorvariablerna

$$(32) \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } y_{ij} \text{ observeras} \\ 0 & \text{om } y_{ij} \text{ inte observeras} \end{cases}$$

$$(33) \quad d_{rj} = \begin{cases} 1 & \text{om } x_{rj} \text{ observeras} \\ 0 & \text{om } x_{rj} \text{ inte observeras} \end{cases}$$

Dessa indikatorvariabler vill vi också kunna skriva i form av diagonalmatriserna C_j och D_j där

$$(34) \quad C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} & & & 0 \\ & c_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{p-k,j} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad j=1, \dots, n$$

och

$$(35) \quad D_j = \begin{pmatrix} d_{1j} & & & 0 \\ & d_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{kj} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad j=1, \dots, n$$

Bortfallet antas vara icke-stokastiskt, dvs fixt i olika stickprov. Vi begränsar oss till att behandla sådana typer av bortfall, där det finns observationer på minst k st. testvariabler för varje individ.

Vi antar nu att de saknade observationerna är i överensstämmelse med vår modell, dvs vi kompletterar fiktivt de ursprungliga data med den systematiska delen av de saknade observationerna, vilket kan skrivas som

$$(36) \quad y_{ij} = \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j} + \epsilon_{ij} c_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, p-k \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$(37) \quad x_{rj} = \mu_{rj} + \delta_{rj} d_{rj} \quad \begin{matrix} r=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

Logaritmen av likelihoodfunktionen, ℓ , blir

$$(38) \quad \ell = -\frac{nf}{2} \ln \sigma^2 - \frac{nf}{2} \ln 2\pi - \frac{Q}{2\sigma^2}$$

där

$$(38a) \quad f = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k d_{rj} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} c_{ij} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \text{Sp} D_j + \sum_{j=1}^n \text{Sp} C_j \right)$$

$$(39) \quad Q = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k \delta_{rj}^2 d_{rj} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} \epsilon_{ij}^2 c_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k (x_{rj} - \mu_{rj})^2 d_{rj} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j})^2 c_{ij}$$

På samma sätt som tidigare beräknar vi de partiella derivatorna av ℓ för att söka maximiskattningar. Då fås

$$(40) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \gamma_{im}} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j}) \mu_{mj} c_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, p-k \\ m=1, \dots, k \end{matrix}$$

$$(41) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \mu_{rj}} = \frac{2}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k \gamma_{i\ell} \mu_{\ell j}) \gamma_{ir} c_{ij} + (x_{rj} - \mu_{rj}) d_{rj} \right]$$

$$\begin{matrix} r=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$(42) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \sigma^2} = - \frac{nf}{2\sigma^2} + \frac{Q}{2\sigma^4}$$

Med hjälp av (34), (35) och tidigare införda beteckningar i kapitel 3 kan (40), (41) och (42) skrivas som

$$(43) \quad \frac{\delta \ell}{\delta y_m} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - r_{\mu_j}) C_j \mu_{mj} \quad m=1, \dots, k$$

$$(44) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \mu_j} = \frac{2}{\sigma^2} [r' C_j (y_j - r_{\mu_j}) + D_j (x_j - \mu_j)] \quad j=1, \dots, n$$

$$(45) \quad \frac{\delta \ell}{\delta \sigma^2} = - \frac{nf}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n [(x_j - \mu_j)' D_j (x_j - \mu_j) + (y_j - r_{\mu_j})' C_j (y_j - r_{\mu_j})]}{2\sigma^4}$$

Vi får genom nollsättning av de partiella derivatorna följande ekvationssystem för skattningarna:

$$(46) \quad \sum_{j=1}^n C_j G X_j X_j' = \sum_{j=1}^n C_j y_j X_j'$$

$$(47) \quad (D_j + G' C_j G) X_j = D_j x_j + G' C_j y_j \quad j=1, \dots, n$$

$$(48) \quad s^2 = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_j - X_j)' D_j (x_j - X_j) + (y_j - G X_j)' C_j (y_j - G X_j)]}{nf}$$

Matriserna $\sum_{j=1}^n \underline{X}_j \underline{X}_j' c_{ij}$ och $D_j + G' C_j G$ antas vara icke-singulära för alla värden på i resp j , vilket medför att vi måste ha minst k st. observationer på j :te observationsvektorn.

För att lösa det komplicerade icke-lineära ekvationssystemet (46), (47) kan vi använda följande enkla iterativa metod: Efter det att vi har fått $G^{(s)}$, den s :te approximationen av faktorladdningarna, sätter vi den s :te approximationen av faktorerna, $\underline{X}_j^{(s)}$, som

$$(49) \quad \underline{X}_j^{(s)} = (D_j + G^{(s)'} C_j G^{(s)})^{-1} (D_j \underline{x}_j + G^{(s)'} C_j \underline{y}_j) \quad j=1, \dots, n$$

och den $(s+1)$:a approximationen av faktorladdningarna som

$$(50) \quad (g_{i1}^{(s+1)}, \dots, g_{ik}^{(s+1)}) = \\ = \left(\sum_{j=1}^n y_{ij} c_{ij} \underline{X}_j^{(s)} \right) \left(\sum_{j=1}^n \underline{X}_j^{(s)} \underline{X}_j^{(s)'} c_{ij} \right)^{-1} \\ i=1, 2, \dots, p-k$$

På grund av det komplicerade utseendet hos ekvationssystemet (46), (47) känner vi inte det exakta antalet lösningar till systemet. Vi kan inte ens visa att systemet alltid har icke-degenererade lösningar. I de flesta av de Monte-Carloförsök, som redovisas i kapitel 6, har emellertid konvergens erhållits. För de försök med extremt stort bortfall, där konvergensen var dålig, modifierades förfarandet. Individer med observationer på exakt k st. testvariabler undantogs från iterationsprocessen. Med denna modifikation av proceduren (49), (50) erhöles konvergens i samtliga Monte-Carloförsök. I kapitel 5 ska visas att vid stora stickprov får vi under vissa förutsättningar konvergens till en unik lösning för en första approximation av faktorladdningarna i närheten av Γ .

5 ASYMPTOTISKA EGENSKAPER HOS SKATTNINGARNA

I detta kapitel skall vi studera egenskaperna vid stora stickprov hos skattningarna för faktorladdningarna. Våra skattningar är visserligen maximum-likelihood-skattningar, men eftersom antalet parametrar i den studerade modellen växer med stickprovsstorleken kan vi inte förlita oss på de kända satserna om egenskaper hos maximum-likelihood-skattningar (se Cramér (1946)). Ty dessa satser gäller bl a bara under förutsättning att antalet parametrar är ändligt och oberoende av stickprovsstorleken.

I en artikel av Neyman-Scott (1948) införes begreppen strukturparametrar och "incidental"-parametrar genom att man betraktar en följd av stokastiska variabler $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, \dots$. För denna följd antas mängden av okända parametrar vara oändlig och kunna splittras upp i två delar. Den första delen består av ett ändligt antal parametrar och varje sådan parameter finns med i sannolikhetsfördelningen för ett oändligt antal stokastiska variabler av följden $\{\underline{x}_i\}$. Dessa parametrar kallas strukturparametrar. Den andra delen av mängden av okända parametrar är oändlig och består av parametrar, sådana att varje parameter finns med i sannolikhetsfördelningen för endast ett ändligt antal av de stokastiska variablerna $\{\underline{x}_i\}$. Denna parameterföljd kallas då "incidental"-parametrar eller tillfällighetsparametrar. Distinktionen mellan struktur- och tillfällighetsparametrar görs på grund av att man i allmänhet bara är intresserad av egenskaperna hos skattningar av strukturparametrarna. Med ovanstående terminologi blir i vår modell Γ och σ^2 strukturparametrar och $\underline{\mu}_j$ tillfällighetsparametrar. En diskussion från senare tid om olika möjligheter att använda likelihood-metoden vid fall med tillfällighetsparametrar finns i Kalbfleisch-Sprott (1970).

I vårt fall är det möjligt att visa att de föreslagna skattningarna av faktorladdningarna är konsistenta och asymptotiskt normalfördelade. Vidare kan första och andra momenten hos den asymptotiska fördelningen erhållas. Dessa egenskaper hos skattningarna kommer att visas med samma metod, som Christoffersson (1970b) använde i enfaktorfallet. Det kan anmärkas att de asymptotiska egenskaperna hos denna typ av maximum-likelihoodskattningar har undersökts allmänt av Andersen (1970).

Låt oss först visa att vi får de tidigare erhållna maximiskattningarna för faktorladdningarna genom att minimera en funktion F , som är residualkvadratsumman dividerad med antalet observationer, betingat skattningar av faktorerna enligt ekv (47). Då blir funktionen F en funktion enbart av laddningarna.

Vi definierar alltså funktionen F som

$$(51) \quad F = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k g_{i\ell} X_{\ell j})^2 c_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k (x_{rj} - X_{rj})^2 d_{rj} \right] =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n (\underline{y}_j - G \underline{X}_j)' C_j (\underline{y}_j - G \underline{X}_j) + \sum_{j=1}^n (\underline{x}_j - \underline{X}_j)' D_j (\underline{x}_j - \underline{X}_j) \right]$$

där då $\underline{X}_j$ definieras av

$$(52) \quad \underline{X}_j = (D_j + G' C_j G)^{-1} (D_j \underline{x}_j + G' C_j \underline{y}_j) \quad j=1, 2, \dots, n$$

För att ta hänsyn till att $\underline{X}_j$ enligt (52) beror av G , inför vi följande två typer av partiella derivator:

- i) $\frac{dF}{\delta g_{il}}$, som betecknar den partiella derivatan av F med avseende på g_{il} , när F betraktas som en funktion av G
- ii) $\frac{\delta F}{\delta g_{il}}$, som betecknar den partiella derivatan av F med avseende på g_{il} , när F betraktas som en funktion av G och $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$

Den partiella derivatan av F m.a.p. g_{im} , då F betraktas som en funktion enbart av laddningarna, blir då,

$$(53) \quad \frac{dF}{\delta g_{im}} = \frac{\delta F}{\delta g_{im}} + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k \frac{\delta F}{\delta X_{rj}} \frac{\delta X_{rj}}{\delta g_{im}}$$

där från (51)

$$(54) \quad \frac{\delta F}{\delta X_{rj}} = - \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{p-k} (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k g_{i\ell} X_{\ell j}) g_{ir} c_{ij} + d_{rj} (x_{rj} - X_{rj}) \right]$$

och

$$(55) \quad \frac{\delta F}{\delta g_{im}} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \sum_{\ell=1}^k g_{i\ell} X_{\ell j}) X_{mj} c_{ij}$$

Ekv (54) får i vektorform utseendet,

$$(56) \quad \frac{\delta F}{\delta \underline{X}_j} = - \frac{2}{n} \left[\underline{G}' \underline{C}_j (\underline{y}_j - \underline{G} \underline{X}_j) + \underline{D}_j (\underline{x}_j - \underline{X}_j) \right]$$

På grund av villkoren (52) fås då $\frac{\delta F}{\delta X_{rj}} = 0$. Detta medför att

ekv (53) i vektorform blir

$$(57) \quad \frac{dF}{\delta \underline{g}_m} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \underline{C}_j (\underline{y}_j - \underline{G} \underline{X}_j) \underline{X}_{mj}$$

Vi ser nu att nollställning av ekv (57), för att få skattningar som ger minimum av F , och villkoren (52) ger samma ekvations-system som maximiskattningarna (46) och (47). Vi har alltså visat, att maximiskattningarna av faktorladdningarna kan fås genom att minimera funktionen F , betraktad som en funktion enbart av laddningarna.

För att undersöka de asymptotiska egenskaperna hos våra skattningar måste vi studera de partiella derivatorna av F . Låt oss emellertid först rekapitulera vår modell och införa några ytterligare antaganden i denna.

Vår modell ges av ekv (36) och (37) eller i vektorform

$$(58) \quad \underline{y}_j = \Gamma \underline{\mu}_j + C_j \underline{\varepsilon}_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$(59) \quad \underline{x}_j = \underline{\mu}_j + D_j \underline{\delta}_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Residualerna, sammanfattade i vektorerna $\underline{\varepsilon}_j$ och $\underline{\delta}_j$, antog vi vara simultant normalfördelade, alla oberoende av varandra, med medelvärden noll och varianser σ^2 . Vidare var residualerna i den j :te observationen oberoende av de i den ℓ :te observationen för $j \neq \ell$. Dessutom förutsatte vi, att residualerna var oberoende av faktorerna.

För faktorerna antar vi nu att de kan vara icke-stokastiska eller stokastiska och $\underline{\mu}_j$ förutsättes oberoende av $\underline{\mu}_\ell$ för $j \neq \ell$. Vidare antar vi att andramomenten för faktorerna existerar. Om faktorerna är stokastiska antas de följa samma fördelning.

Bortfallet, representerat av indikatormatriserna C_j och D_j , har vi antagit vara icke-stokastiskt. Dessutom antogs matriserna $D_j + G' C_j G$, $j=1, 2, \dots, n$, vara icke-singulära.

5.1 Första ordningens derivator

Första derivatorna av F , betraktad som en funktion av laddningarna, ges av ekv (57). Vi behöver för senare bruk väntevärden, varianser och kovarianser av dessa derivator, givet av skattningarna av laddningarna, G , är lika med de sanna laddningarna, Γ .

Först skall vi visa att

$$(60) \quad E \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \mid G=\Gamma \right) = \mathbf{0} \quad m=1,2,\dots,k$$

Från ekv (52), (58) och (59) får vi att

$$\begin{aligned} (61) \quad \underline{X}_j \mid G=\Gamma &= (D_j + \Gamma' C_j \Gamma)^{-1} (D_j \underline{\mu}_j + D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \Gamma \underline{\mu}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j) = \\ &= \underline{\mu}_j + \Lambda_j^{-1} (D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j) \end{aligned}$$

där vi definierar Λ_j som

$$(62) \quad \Lambda_j = D_j + \Gamma' C_j \Gamma$$

Vi får då från (61) att

$$(63) \quad E(\underline{X}_j \mid G=\Gamma) = E(\underline{\mu}_j)$$

$$\begin{aligned} (64) \quad E(\underline{X}_j \underline{X}_j' \mid G=\Gamma) &= E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \\ &+ \Lambda_j^{-1} E[(D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j)(D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j)'] \Lambda_j^{-1} = \\ &= E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \sigma^2 \Lambda_j^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (65) \quad E(y_j X_j' | G=\Gamma) &= E \left[(\Gamma \mu_j + C_j \varepsilon_j) (\mu_j + \Lambda_j^{-1} (D_j \delta_j + \Gamma' C_j \varepsilon_j))' \right] = \\
 &= \Gamma E(\mu_j \mu_j') + \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1}
 \end{aligned}$$

Från (57) blir förväntade värdet av första derivatorna, givet att de skattade laddningarna är lika med de sanna

$$(66) \quad E \left[\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \mid G=\Gamma \right] = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j \left[E(y_j X_{mj}' | G=\Gamma) - \Gamma E(X_j X_{mj}' | G=\Gamma) \right]$$

och från (63), (64) och (65) fås då omedelbart (60), dvs vi har visat att

$$E \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \mid G=\Gamma \right) = \mathbf{0} \quad m=1, 2, \dots, k$$

Vi fortsätter nu med att beräkna varianser och kovarianser av första derivatorna, givet $G=\Gamma$, dvs

$$E \left[\left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_{im}} - E \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_{im}} \right) \right) \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_{rt}} - E \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_{rt}} \right) \right) \mid G=\Gamma \right]$$

$m, t = 1, 2, \dots, k$
 $i, r = 1, 2, \dots, p-k$

Då beräknar vi först

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & E[C_j(\underline{y}_j - G\underline{X}_j)X_{mj}(\underline{y}_j - G\underline{X}_j)'X_{tj}C_j \mid G=r] = \\
 & = E[C_j(\underline{y}_j\underline{y}_j' - r\underline{X}_j\underline{y}_j' - \underline{y}_j\underline{X}_j'r' + r\underline{X}_j\underline{X}_j'r')C_j \mid G=r] \cdot E[X_{mj}X_{tj} \mid G=r] = \\
 & = C_j[\sigma^2 C_j - r\Lambda_j^{-1}r'C_j\sigma^2 - \sigma^2 C_j r\Lambda_j^{-1}r' + r\Lambda_j^{-1}r'\sigma^2] C_j [\sigma^2 \lambda_j^{mt} + E(\mu_{mj}\mu_{tj})] \\
 & = \sigma^2 C_j [I - r\Lambda_j^{-1}r'] C_j [E(\mu_{mj}\mu_{tj}) + \sigma^2 \lambda_j^{mt}]
 \end{aligned}$$

Detta resultat följer från att $C_j(\underline{y}_j - G\underline{X}_j) \mid G=r$ och $X_{mj} \mid G=r$ enligt (58) och (61) har en simultan normalfördelning och vid härledning- en av ekv (60) visats vara okorrelerade, vilket medför oberoende för dessa storheter. λ_j^{mt} betecknar här elementet på plats (m,t) i Λ_j^{-1} .

Från (57), (60) och (67) får vi då att matrisen av kovarianserna mellan första derivatan av F m.a.p. $\underline{g}_m$ och första derivatan av F m.a.p. $\underline{g}_t$, givet $G=r$, blir

$$\begin{aligned}
 (68) \quad & E\left[\frac{dF}{d\underline{g}_m} \left(\frac{dF}{d\underline{g}_t}\right)' \mid G=r\right] = \\
 & = \frac{4}{n^2} \sum_{j=1}^n E\left[C_j(\underline{y}_j - G\underline{X}_j)X_{mj}(\underline{y}_j - G\underline{X}_j)'X_{tj}C_j \mid G=r\right] = \\
 & = \frac{4\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n C_j[I - r\Lambda_j^{-1}r'] C_j [E(\mu_{mj}\mu_{tj}) + \sigma^2 \lambda_j^{mt}] = \frac{1}{n} \Psi_{mt}
 \end{aligned}$$

$$m=1,2,\dots,k$$

$$t=1,2,\dots,k$$

Vi antar nu att andra momenten för första derivatorna i $G=r$ är stationära i den betydelsen att matriserna

$$(69) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=u}^{n+u-1} C_j [I - r \Lambda_j^{-1} r'] C_j [E(\mu_{mj} \mu_{tj}) + \sigma^2 \lambda_j^{mt}]$$

existerar och är konstanta för alla värden på u . Den asymptotiska fördelningen för storheterna $\sqrt{n} \frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \Big|_{G=r}$ $m=1,2,\dots,k$,

kommer då att bli normal med Ψ_{mt} som matriser av kovarianser mellan

$$\sqrt{n} \frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \Big|_{G=r} \text{ och } \sqrt{n} \frac{dF}{d\mathbf{g}_t} \Big|_{G=r} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \Big|_{G=r}, \quad m = 1, 2, \dots, k,$$

kommer att konvergera i sannolikhet mot nollvektorn.

5.2 Andra ordningens derivator

För att studera egenskaperna hos skattningarna av faktorladdningarna vid stora stickprov behöver vi också förväntade värdet av andra ordningens partiella derivator, givet $G=r$. Andra ordningens derivator blir från (53)

$$(70) \frac{d^2 F}{d\mathbf{g}_{rt} d\mathbf{g}_m} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{g}_{rt}} \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^k \frac{\delta}{\delta X_{sj}} \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \right) \frac{\delta X_{sj}}{\delta \mathbf{g}_{rt}}$$

Första termen i högerledet i ekv (70) fås från (57) till

$$(71) \frac{\delta}{\delta \mathbf{g}_{rt}} \left(\frac{dF}{d\mathbf{g}_m} \right) = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j \left[- \frac{\delta G}{\delta \mathbf{g}_{rt}} X_j \right] X_{mj} =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j J_{rt-j} X_j X_{mj}$$

där J_{rt} är en $[(p-k) \times k]$ -matris med alla element lika med nollor utom elementet i rad r och kolumn t , som är en etta.

För att kunna beräkna övriga termer i högerledet av ekv (70) skriver vi först om första derivatan, som ges av ekv (57), på följande sätt

$$(72) \quad \frac{dF}{\delta \underline{g}_m} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j \left[\underline{y}_j - \sum_{\ell=1}^k \underline{g}_\ell X_{\ell j} \right] X_{mj}$$

Vi deriverar nu ekv (72) m.a.p. X_{sj} . Detta ger då

$$(73) \quad \frac{\delta}{\delta X_{sj}} \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}_m} \right) = - \frac{2}{n} \left[C_j (\underline{y}_j - \underline{G} \underline{X}_j) \Delta_{sm} - C_j \underline{g}_s X_{mj} \right]$$

där Δ_{sm} är det vanliga Kroenecker-deltat, dvs

$$\Delta_{sm} = \begin{cases} 1 & \text{om } s = m \\ 0 & \text{om } s \neq m \end{cases}$$

I högerledet av ekv (70) ingår den partiella derivatan av X_{sj} m.a.p. $\underline{g}_{rt}$. Vi behöver alltså också beräkna $\frac{\delta X_j}{\delta \underline{g}_{rt}}$.

Ekv (52), där vi definierar $\underline{X}_j$, skriver vi som

$$(74) \quad \underline{X}_j = \underline{L}_j^{-1} (\underline{D}_j \underline{x}_j + \underline{G}' C_j \underline{y}_j)$$

där matrisen $\underline{L}_j$ definieras som

$$(75) \quad \underline{L}_j = \underline{D}_j + \underline{G}' C_j \underline{G}$$

Alltså får vi genom derivering av (74) m.a.p. $\underline{g}_{rt}$

$$(76) \quad \frac{\delta X_j}{\delta \underline{g}_{rt}} = \frac{\delta \underline{L}_j^{-1}}{\delta \underline{g}_{rt}} (\underline{D}_j \underline{x}_j + \underline{G}' C_j \underline{y}_j) + \underline{L}_j^{-1} \frac{\delta \underline{G}'}{\delta \underline{g}_{rt}} C_j \underline{y}_j$$

Men genom att derivera enhetsmatrisen m.a.p. g_{rt} får vi derivatan av L_j^{-1} uttryckt i derivatan av L_j .

$$(77) \quad \frac{\delta L_j^{-1}}{\delta g_{rt}} = - L_j^{-1} \frac{\delta L_j}{\delta g_{rt}} L_j^{-1}$$

Vidare är

$$(78) \quad \frac{\delta L_j}{\delta g_{rt}} = \frac{\delta G'}{\delta g_{rt}} C_j G + G' C_j \frac{\delta G}{\delta g_{rt}}$$

och

$$(79) \quad \frac{\delta G}{\delta g_{rt}} = J_{rt}$$

$$(80) \quad \frac{\delta G'}{\delta g_{rt}} = J_{tr}$$

Alltså fås från (61), (76), (77), (78), (79) och (80) att

$$\begin{aligned} (81) \quad & \frac{\delta X_j}{\delta g_{rt}} \Big|_{G=\Gamma} = \\ & = - \Lambda_j^{-1} (J_{tr} C_j \Gamma + \Gamma' C_j J_{rt}) \Lambda_j^{-1} (\Lambda_j \underline{\mu}_j + D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\epsilon}_j) + \\ & + \Lambda_j^{-1} J_{tr} C_j \Gamma \underline{\mu}_j + \Lambda_j^{-1} J_{tr} C_j \underline{\epsilon}_j = \\ & = - \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j J_{rt} \underline{\mu}_j + \Lambda_j^{-1} J_{tr} C_j \underline{\epsilon}_j - \\ & - \Lambda_j^{-1} (J_{tr} C_j \Gamma + \Gamma' C_j J_{rt}) \Lambda_j^{-1} (D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\epsilon}_j) \end{aligned}$$

Andra ordningens derivator blir från (70), (71) och (73)

$$(82) \quad \frac{d^2 F}{\delta g_{rt} \delta g_m} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j J_{rt} X_j X_{mj} - \\ - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j \left[(y_j - G X_j) \frac{\delta X_{mj}}{\delta g_{rt}} - G \frac{\delta X_j}{\delta g_{rt}} X_{mj} \right]$$

För att få förväntade värdet av andra ordningens derivator, givet $G = \Gamma$, behöver vi alltså

$$(83) \quad E \left(X_j \frac{\delta X_j}{\delta g_{rt}} \mid G = \Gamma \right) = \\ = - E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') J_{tr} C_j \Gamma' \Lambda_j^{-1} + \sigma^2 \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} - \\ - \sigma^2 \Lambda_j^{-1} (J_{tr} C_j \Gamma + \Gamma' C_j J_{rt}) \Lambda_j^{-1} = \\ = - \left[E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \sigma^2 \Lambda_j^{-1} \right] J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1}$$

som erhålles från (61) och (81). Vidare behövs

$$(84) \quad E \left(y_j \frac{\delta X_j}{\delta g_{rt}} \mid G = \Gamma \right) = \\ = - \Gamma E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} + \sigma^2 C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} - \\ - \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} (J_{tr} C_j \Gamma + \Gamma' C_j J_{rt}) \Lambda_j^{-1}$$

Ekv (84) fås från (59) och (81).

Med hjälp av ekv. (83) och (84) kan vi nu beräkna

$$\begin{aligned}
 (85) \quad E \left[C_j (\underline{y}_j - G \underline{x}_j) \frac{\delta \underline{x}_j}{\delta \underline{g}_{rt}} - C_j (J_{rt} \underline{x}_j + G \frac{\delta \underline{x}_j}{\delta \underline{g}_{rt}}) \underline{x}_j \right]_{G=r} &= \\
 &= - C_j \Gamma E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} + \sigma^2 C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} - \\
 &- \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} - \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} + \\
 &+ C_j \Gamma E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} + \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} J_{tr} C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} - C_j J_{rt} E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') \\
 &- \sigma^2 C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} + C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j J_{rt} E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \sigma^2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j J_{rt} \Lambda_j^{-1} = \\
 &= - C_j [I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma'] C_j J_{rt} E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j')
 \end{aligned}$$

Nu får vi slutligen väntevärdet av andra ordningens partiella derivator i $G=r$ från (82) och (85) som

$$(86) \quad E \left(\frac{d^2 F}{\delta \underline{g}_{rt} \delta \underline{g}_m} \right)_{G=r} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j [I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma'] C_j J_{rt} E[\underline{\mu}_j \underline{\mu}_{mj}]$$

eller som

$$(87) \quad E \left(\frac{d^2 F}{\delta \underline{g}_t \delta \underline{g}_m} \right)_{G=r} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j [I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma'] C_j \cdot E[\underline{\mu}_{tj} \underline{\mu}_{mj}]$$

$$m=1, 2, \dots, k$$

$$t=1, 2, \dots, k$$

Vi gör nu antagandet att väntevärdena av andra ordningens partiella derivator i $G=r$ är stationära i den betydelsen att matri-

serna

$$(88) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=u}^{n+u-1} C_j [I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma'] \cdot E[\mu_{tj} \mu_{mj}]$$

existerar och är konstanta för alla värden på u .

För att kunna sammanfatta våra resultat på ett mera kompakt och lättöverskådligt sätt definierar vi en vektor $\underline{g}$ genom att ordna kolumnvektorerna i G i en enda kolumnvektor, dvs

$$(89) \quad \underline{g}' = (\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \dots, \underline{g}'_k)$$

$\underline{g}$ har alltså pk element. På samma sätt definierar vi $\underline{y}$.

$$(90) \quad \underline{y}' = (\underline{y}'_1, \underline{y}'_2, \dots, \underline{y}'_k)$$

Vi kan då med detta beteckningssätt skriva ekv (60) som

$$(91) \quad E = \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}} \bigg|_{G=\Gamma} \right) = \underline{0}$$

och ekv (68) som

$$(92) \quad E \left[\frac{dF}{\delta \underline{g}} \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}} \right)' \bigg|_{G=\Gamma} \right] = C \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}} \bigg|_{G=\Gamma} \right) =$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n C_j \left[I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' \right] C_j \otimes \left[E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \sigma^2 \Lambda_j^{-1} \right] = \frac{\Psi}{n}$$

där C i andra ledet betecknar kovariansmatrisen för storheten.

Ekv (87) kan skrivas som

$$(93) \quad E \left[\frac{d^2 F}{\delta \underline{g} \delta \underline{g}'} \bigg|_{G=\Gamma} \right] = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j (I - \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma') C_j \otimes E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j')$$

$A \otimes B$ betecknar här Kroenecker-produkten eller den direkta produkten av matriserna A och B , dvs om A är en $[p \times p]$ -matris och B en $[q \times q]$ -matris, så är

$$(94) \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pp}B \end{pmatrix}$$

$A \otimes B$ är alltså en $[pq \times pq]$ -matris.

Vi antar nu att funktionen F har minimum i $G=\Gamma$, då $n \rightarrow \infty$ dvs att matrisen av andra ordningens partiella derivator konvergerar i sannolikhet mot en positivt definit matris i $G=\Gamma$. Om vi inför beteckningen A för de partiella derivatorna av andra ordningen,

$$(95) \quad A = \frac{d^2 F}{d\mathbf{g} d\mathbf{g}'}$$

kan vi uttrycka detta villkor på följande sätt: Det finns ett $\epsilon_0 > 0$, så att för varje vektor $\underline{z}$, skild från nollvektorn, gäller

$$(96) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left(\underline{z}' A \underline{z} \mid_{G=\Gamma} \right) > (\underline{z}' \underline{z}) \epsilon_0 \right] = 1$$

5.3 Konsistens

Vårt villkor (96) innebär att för varje $\epsilon > 0$ finns det ett n_0 och ett ϵ_0 , så att för alla $n > n_0$ och $\underline{z} \neq \underline{0}$ gäller det att

$$(97) \quad P \left[\left(\underline{z}' A \underline{z} \mid_{G=\Gamma} \right) > (\underline{z}' \underline{z}) \varepsilon_0 \right] > 1 - \varepsilon$$

Eftersom A är en kontinuerlig funktion av G , så finns det ett område R med $\underline{\gamma}$ som inre punkt, så att

$$(98) \quad P \left[\left(\underline{z}' A \underline{z} \mid_{\underline{g} \in R} \right) > (\underline{z}' \underline{z}) \varepsilon_0 \right] > 1 - 2\varepsilon$$

Då $\frac{dF}{d\underline{g}} \mid_{G=\Gamma}$ konvergerar i sannolikhet mot nollvektorn, när n går mot oändligheten, så finns det för varje $\delta > 0$ ett n_1 , så att för alla $n > n_1$, gäller

$$(99) \quad P \left(\left| \frac{dF}{d\underline{g}} \right| < \delta \varepsilon_0 \mid_{G=\Gamma} \right) > 1 - \varepsilon$$

δ väljes nu så, att alla $\underline{g}$, sådana att $|\underline{g} - \underline{\gamma}| \leq \delta$, tillhör R .

Vi gör en Taylorutveckling av $\frac{dF}{d\underline{g}}$ kring $\underline{g} = \underline{\gamma}$ och multiplicerar sedan med $(\underline{g} - \underline{\gamma})'$ från vänster, vilket ger

$$(99a) \quad (\underline{g} - \underline{\gamma})' \frac{dF}{d\underline{g}} = (\underline{g} - \underline{\gamma})' \left(\frac{dF}{d\underline{g}} \mid_{\underline{g}=\underline{\gamma}} \right) + (\underline{g} - \underline{\gamma})' (A \mid_{\underline{g}=\underline{g}^*}) (\underline{g} - \underline{\gamma})$$

där $\underline{g}^*$ ligger mellan $\underline{g}$ och $\underline{\gamma}$, dvs $0 < |\underline{g}^* - \underline{\gamma}| < |\underline{g} - \underline{\gamma}|$. Från ekv (98) och (99) får vi då att för $n > \max(n_0, n_1)$

$$(99b) \quad P \left((\underline{g} - \underline{\gamma})' \left(-\frac{dF}{d\underline{g}} \right) < 0 \mid |\underline{g} - \underline{\gamma}| = \delta \right) > 1 - 3\varepsilon$$

Sedan använder vi oss av följande lemma från Davidson-Lever(1970):

Om $\underline{f}$ är en kontinuerlig funktion från R^k till R^k med den egenskapen att, för varje $\underline{\theta}$ sådant att $|\underline{\theta} - \underline{\theta}^*| = \delta$, $\delta > 0$,

$(\underline{\theta} - \underline{\theta}^*)' \underline{f}(\underline{\theta}) < 0$, så existerar det en punkt $\hat{\underline{\theta}}$ sådan att

$|\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}^*| < \delta$ och $\underline{f}(\hat{\underline{\theta}}) = \underline{0}$.

Med hjälp av detta lemma följer då från ekv (99b) att

$$(100) \quad P \left(\frac{\delta F}{\delta \underline{g}} = \underline{0} \quad \text{för något } \underline{g} \text{ sådant att } |\underline{g} - \underline{\gamma}| < \delta \right) > 1 - 3\epsilon$$

för $n > \max(n_0, n_1)$.

Då skattningarna för faktorladdningarna fås från nollsättning av $\frac{dF}{\delta \underline{g}}$ samt δ och ϵ här kan väljas godtyckligt små, blir alltså våra skattningar konsistenta.

5.4 Asymptotisk kovariansmatris och asymptotisk normalitet

Vi gör en Taylorutveckling av $\frac{dF}{\delta \underline{g}}$ kring punkten $\underline{g} = \underline{\gamma}$ och får då

$$(101) \quad \frac{dF}{\delta \underline{g}} = \frac{dF}{\delta \underline{g}} \Big|_{\underline{g}=\underline{\gamma}} + \left(A \Big|_{\underline{g}=\underline{g}^*} \right) (\underline{g} - \underline{\gamma})$$

där $\underline{g}^*$ ligger mellan $\underline{g}$ och $\underline{\gamma}$. Eftersom $\frac{dF}{\delta \underline{g}}$ är noll i lösningen kan (101) skrivas som

$$(102) \quad \underline{0} = \frac{dF}{\delta \underline{g}} \Big|_{\underline{g}=\underline{\gamma}} + \left(A \Big|_{\underline{g}=\underline{g}^*} \right) (\underline{g} - \underline{\gamma})$$

eller

$$(103) \quad \underline{g} - \underline{\gamma} = - \left(A^{-1} \Big|_{\underline{g}=\underline{g}^*} \right) \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}} \Big|_{\underline{g}=\underline{\gamma}} \right)$$

för $A^{-1} \Big|_{\underline{g}=\underline{g}^*}$ icke-singulär. Då våra skattningar är konsistenta kommer $\underline{g}$ och därmed $\underline{g}^*$ att konvergera i sannolikhet mot $\underline{\gamma}$ då $n \rightarrow \infty$. Detta medför att A kommer att konvergera i sannolikhet mot storheten, som ges av ekv (93). Vidare är $\sqrt{n} \left(\frac{dF}{\delta \underline{g}} \Big|_{\underline{g}=\underline{\gamma}} \right)$ enligt ti-

digare avsnitt asymptotiskt normalfördelad med medelvärdesvektor $\underline{0}$

och kovariansmatris Ψ , där Ψ definieras i ekv (92). På samma sätt som i enfaktorfallet kommer då $\sqrt{n}(\underline{g}-\underline{\gamma})$ bli asymptotiskt normalfördelad med medelvärdesvektor $\underline{0}$ och kovariansmatris Σ , där

$$(104) \quad \Sigma = \left[E(A \mid \underline{g}=\underline{\gamma}) \right]^{-1} \Psi \left[E(A \mid \underline{g}=\underline{\gamma}) \right]^{-1}$$

Den asymptotiska fördelningen för $\underline{g}$ blir då normal med medelvärdesvektor $\underline{\gamma}$ och kovariansmatris Σ/n .

När inga observationer saknas förenklas uttrycket för kovariansmatrisen för faktorladdningarna. Då fås

$$(105) \quad E(A \mid \underline{g}=\underline{\gamma}) = 2 (I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes \Phi$$

och

$$(106) \quad \Psi = 4\sigma^2 (I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes (\Phi + \sigma^2 \Lambda^{-1})$$

Med användning av räkneregler för matriser från Graybill (1969) kan ekv (104) skrivas som

$$\begin{aligned} (107) \quad \Sigma &= ((I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes \Phi)^{-1} (\sigma^2 (I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes (\Phi + \sigma^2 \Lambda^{-1})) ((I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes \Phi)^{-1} = \\ &= ((I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma')^{-1} \otimes \Phi^{-1}) (\sigma^2 (I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma') \otimes (\Phi + \sigma^2 \Lambda^{-1})) ((I - \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma')^{-1} \otimes \Phi^{-1}) = \\ &= \sigma^2 (I \otimes \Phi^{-1} (\Phi + \sigma^2 \Lambda^{-1})) (I + \Gamma \Gamma') \otimes \Phi^{-1} = \\ &= \sigma^2 ((I + \Gamma \Gamma') \otimes \Phi^{-1} (\Phi + \sigma^2 \Lambda^{-1}) \Phi^{-1}) \end{aligned}$$

Med endast en faktor inträder ytterligare förenklingar. I specialfallet med två testvariabler fås variansen för faktorladdningen till

$$(108) \quad V(g) = \sigma^2 (\phi(1 + \gamma^2) + \sigma^2) / n\phi^2$$

där ϕ betecknar elementet i Φ .

I enfaktorfallet är det möjligt att på ett enkelt sätt jämföra våra resultat om den asymptotiska kovariansmatrisen för laddningarna med tidigare resultat. För att möjliggöra en jämförelse ändrar vi normeringen av faktorladdningarna. Vår tidigare normering innebar att en viss laddning sattes lika med 1. Nu använder vi i stället normeringen, att summan av laddningarnas kvadrater är 1. Med två testvariabler blir då de nya skattningarna av faktorladdningarna, a_1 och a_2 ,

$$(109) \quad \begin{aligned} a_1 &= (1 + g^2)^{-1/2} \\ a_2 &= g (1 + g^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

och motsvarande teoretiska storheter, α_1 och α_2 , blir

$$(110) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= (1 + \gamma^2)^{-1/2} \\ \alpha_2 &= \gamma (1 + \gamma^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Elementet i Φ med den nya normeringen, ϕ^* , blir

$$(111) \quad \phi^* = (1 + \gamma^2) \phi$$

Från ekv (108), (109), (110), (111) och Rao (1965, kap.6a) får vi asymptotiskt

$$(112) \quad \begin{aligned} V(a_1) &= V((1+g^2)^{-1/2}) = V(g) \gamma^2 / (1 + \gamma^2)^3 = \\ &= \gamma^2 \sigma^2 (\phi(1+\gamma^2) + \sigma^2) / n(1+\gamma^2)^3 \phi^2 = \\ &= (1 - \alpha_1^2) \sigma^2 (\phi^* + \sigma^2) / n\phi^{*2} \end{aligned}$$

På samma sätt fås asymptotiskt

$$(113) \quad V(a_2) = (1 - \alpha_2^2) \sigma^2 (\phi^* + \sigma^2) / n \phi^{*2}$$

$$(114) \quad \text{Kov}(a_1, a_2) = -\alpha_1 \alpha_2 \sigma^2 (\phi^* + \sigma^2) / n \phi^{*2}$$

Uttrycken ovan överensstämmer med tidigare kända resultat, Anderson (1963), för den asymptotiska kovariansmatrisen för faktorladdningarna, när inga observationer saknas (se också Christoffersson (1970b)). Anderson använde då normeringen att summan av laddningarnas kvadrater är 1.

5.5 Konvergens för den iterativa proceduren

Det är inte möjligt att visa att den iterativa proceduren (49) och (50) konvergerar för en godtycklig första approximation. För stora stickprov har vi emellertid antagit att F har minimum i $G=\Gamma$. Då F minimeras i varje steg av proceduren i (49) och (50) följer precis som i enfaktorfallet, att vi får en unik lösning för en första approximation i närheten av $G=\Gamma$.

5.6 Asymptotisk fördelning för residualkvadratsumman

Faktorerna i den j :te observationen, $\underline{\mu}_j$, skattas med $\underline{X}_j$, där

$$(115) \quad \underline{X}_j = (D_j + G' C_j G)^{-1} (D_j \underline{x}_j + G' C_j \underline{y}_j)$$

I avsnitt 5.3 har vi visat att G konvergerar mot Γ i sannolikhet. Enligt Cramér (1946) kommer då fördelningen för $\underline{X}_j$ att gå mot fördelningen av

$$(116) \quad \underline{X}_j \Big|_{G=\Gamma} = \underline{\mu}_j + \Lambda_j^{-1} (D_j \delta_j + \Gamma' C_j \varepsilon_j)$$

Fördelningen av de skattade residualerna i den j :te observationen, $\underline{e}_j$ och $\underline{d}_j$ där

$$(117) \quad \underline{e}_j = C_j (\underline{y}_j - G\underline{X}_j)$$

$$(118) \quad \underline{d}_j = D_j (\underline{x}_j - \underline{X}_j)$$

kommer då att gå mot fördelningen av

$$(119) \quad \underline{e}_j \big|_{G=\Gamma} = C_j [\underline{\varepsilon}_j - \Gamma \Lambda_j^{-1} (D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j)]$$

$$(120) \quad \underline{d}_j \big|_{G=\Gamma} = D_j [\underline{\delta}_j - \Lambda_j^{-1} (D_j \underline{\delta}_j + \Gamma' C_j \underline{\varepsilon}_j)]$$

Kvadratsumman av de skattade residualerna för den j :te observationen i $G=\Gamma$ kan skrivas som

$$(121) \quad (\underline{e}_j' \underline{e}_j \big|_{G=\Gamma}) + (\underline{d}_j' \underline{d}_j \big|_{G=\Gamma}) = (\underline{\varepsilon}_j' \underline{\delta}_j) B \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_j \\ \underline{\delta}_j \end{pmatrix}$$

där B är

$$(122) \quad B = \begin{pmatrix} B_{11}' B_{11} + B_{21}' B_{21} & B_{11}' B_{12} + B_{21}' B_{22} \\ B_{12}' B_{11} + B_{22}' B_{21} & B_{12}' B_{12} + B_{22}' B_{22} \end{pmatrix}$$

med

$$(123) \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_j - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j \\ - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j \end{pmatrix}$$

och

$$(124) \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - D_j \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j \\ D_j - D_j \Lambda_j^{-1} D_j \end{pmatrix}$$

Från (123) och (124) fås

$$\begin{aligned}
 (125) \quad B'_{11}B_{11} + B'_{21}B_{21} &= C_j - 2 C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j + \\
 &+ C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j + C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j = \\
 &= C_j - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j = B_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (126) \quad B'_{11}B_{12} + B'_{21}B_{22} &= - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j + \\
 &+ C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j + C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j \Lambda_j^{-1} D_j = \\
 &= - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j = B_{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (127) \quad B'_{12}B_{12} + B'_{22}B_{22} &= D_j \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j + D_j - \\
 &- 2 D_j \Lambda_j^{-1} D_j + \Gamma_j \Lambda_j^{-1} D_j \Lambda_j^{-1} D_j = \\
 &= D_j - D_j \Lambda_j^{-1} D_j = B_{22}
 \end{aligned}$$

Eftersom matrisen B är symmetrisk innebär ekv (125), (126) och (127) att B är idempotent, dvs att $B^2 = B$. Vidare är residualerna i vektorerna $\underline{\varepsilon}_j$ och $\underline{\delta}_j$ oberoende, normalfördelade med konstant varians σ^2 och medelvärde noll. Då gäller enligt Rao (1965), att den kvadratiske formen i ekvation (121), dividerad med σ^2 , är χ^2 -fördelad med antal frihetsgrader lika med $\text{Sp}(B)$. Spåret av B kan beräknas med användning av relationen $\text{Sp}(CD) = \text{Sp}(DC)$ för godtyckliga matriser C och D .

$$\begin{aligned}
 (128) \quad \text{Sp} B &= \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j & - C_j \Gamma \Lambda_j^{-1} D_j \\ - D_j \Lambda_j^{-1} \Gamma' C_j & D_j - D_j \Lambda_j^{-1} D_j \end{pmatrix} \\
 &= \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} - \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \Lambda_j^{-1} \Gamma' & \Gamma \Lambda_j^{-1} \\ \Lambda_j^{-1} \Gamma' & \Lambda_j^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \\
 &= \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} - \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ I \end{pmatrix} \Lambda_j^{-1} (\Gamma' I) \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \\
 &= \text{Sp} \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} - \text{Sp} (\Gamma' I) \begin{pmatrix} C_j & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ I \end{pmatrix} \Lambda_j^{-1} = \\
 &= \text{Sp} C_j + \text{Sp} D_j - \text{Sp} I = \\
 &= \sum_{i=1}^{p-k} c_{ij} + \sum_{r=1}^k d_{rj} - k
 \end{aligned}$$

Eftersom summan av n oberoende χ^2 -fördelade variabler med frihetsgrader v_j också blir χ^2 -fördelad med antalet frihetsgrader lika med $\sum_{j=1}^n v_j$, blir residualkvadratsumman i $G=\Gamma$, dividerad med σ^2 ,

$$(129) \quad \left(\sum_{j=1}^n (\underline{e}_j' \underline{e}_j |_{G=\Gamma}) + \sum_{j=1}^n (\underline{d}_j' \underline{d}_j |_{G=\Gamma}) \right) / \sigma^2$$

χ^2 -fördelad med antal frihetsgrader lika med

$$\begin{aligned}
 (130) \quad v &= \sum_{j=1}^n \left[\text{Sp} C_j + \text{Sp} D_j - \text{Sp} I \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-k} c_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k d_{rj} - nk
 \end{aligned}$$

Enligt den centrala gränsvärdessatsen följer då att residualkvadratsumman i $G=r$ dividerad med antalet frihetsgrader, v , är asymptotiskt normalfördelad med medelvärde σ^2 och varians $2\sigma^4/v$.

Det kan nu visas på exakt samma sätt som i enfaktorfallet, Christoffersson (1970b, kap. 4.6), att den asymptotiska fördelningen för

$$(n)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{\sqrt{L_j}} \frac{X_j}{\sqrt{L_j}}$$

är densamma som den för

$$(n)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{\sqrt{L_j}} \bigg|_{G=r} \frac{X_j}{\sqrt{L_j}} \bigg|_{G=r}$$

och från detta vidare att den asymptotiska fördelningen för

$$(n)^{-1/2} \sum_{j=1}^n (e_j' e_j + d_j' d_j)$$

överensstämmer med den för

$$(n)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{e_j' e_j}{L_j} \right) \bigg|_{G=r} + \left(\frac{d_j' d_j}{L_j} \right) \bigg|_{G=r} \right)$$

I beviset, som blir ganska omfattande, måste man utnyttja, att, eftersom antalet testvariabler är fixerat, så är antalet olika bortfallsmöjligheter ändligt.

Då följer att den skattade residualkvadratsumman, dividerad med antalet frihetsgrader,

$$\left(\sum_{j=1}^n (e_j' e_j + d_j' d_j) \right) / v$$

också blir asymptotiskt normalfördelad med väntevärde σ^2 och varians $2\sigma^4/v$.

5.7 Skattning av asymptotisk kovariansmatris för laddningarna

I den asymptotiska kovariansmatrisen för faktorladdningarna, Σ/n , där Σ ges av ekv (104), ingår storheterna σ^2, Γ och $E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j')$. Maximiskattningarna av σ^2, Γ och $\underline{\mu}_j$ ges av ekv (46), (47) och (48). Från resultaten i avsnitt 5.6 följer att skattningen s^2 av σ^2 i ekv (48) får en asymptotisk skevhet. En bättre skattning av σ^2 är därför

$$(131) \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\underline{e}_j' \underline{e}_j + \underline{d}_j' \underline{d}_j)}{v}$$

där v ges av ekv (130). Man brukar vanligen reducera antalet frihetsgrader med det effektiva antalet skattade parametrar. I vårt fall bör då nämnaren i (131) minskas med antalet skattade faktorladdningar. Vi skattar alltså σ^2 med

$$(132) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\underline{e}_j' \underline{e}_j + \underline{d}_j' \underline{d}_j)}{v - k(p-k)}$$

Från avsnitt 5.6 följer att den asymptotiska fördelningen för $\underline{X}_j \underline{X}_j'$ blir fördelningen för $(\underline{X}_j \underline{X}_j')|_{G=\Gamma}$ och i avsnitt 5.1 visades att

$$(133) \quad E(\underline{X}_j \underline{X}_j' |_{G=\Gamma}) = E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j') + \sigma^2 \Lambda_j^{-1}$$

Därför skattar vi $E(\underline{\mu}_j \underline{\mu}_j')$ med

$$(134) \quad \underline{X}_j \underline{X}_j' - \hat{\sigma}^2 L_j^{-1}$$

där L_j ges av ekv (75).

Γ skattas med maximiskattningen G .

Med hjälp av ovanstående skattningar skattas kovariansmatrisen av första ordningens derivator, vilken ges av ekv (92), med

$$(135) \quad \frac{\hat{\Psi}}{n} = \frac{4\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n C_j [I - GL_j^{-1}G'] C_j \otimes \underline{X}_j \underline{X}_j'$$

och väntevärdet av andra ordningens derivator, vilket ges av ekv (93), skattas med

$$(136) \quad \hat{A} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n C_j (I - GL_j^{-1}G') C_j \otimes [\underline{X}_j \underline{X}_j' - \hat{\sigma}^2 \cdot L_j^{-1}]$$

Med användning av ekv (135) och (136) skattas kovariansmatrisen för laddningarna med

$$(137) \quad \frac{\hat{\Sigma}}{n} = \frac{1}{n} \hat{A}^{-1} \hat{\Psi} \hat{A}^{-1}$$

Från antagandena (69) och (88) följer, att $\hat{\Sigma}$ konvergerar i sannolikhet mot Σ i ekv (104).

Vi skattar Φ med

$$(138) \quad \hat{\Phi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{X}_j \underline{X}_j' - \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \sum_{j=1}^n L_j^{-1}$$

$\hat{\Phi}$ kommer då att konvergera i sannolikhet mot Φ .

Matrisen av andramoment för testvariablerna, Λ , där

$$(139) \quad \Lambda = \frac{1}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \underline{x}_j \\ \underline{y}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_j' & \underline{y}_j' \end{pmatrix} \right]$$

kan skattas med

$$(140) \quad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} I \\ G \end{pmatrix} \hat{\Phi} (IG') + \hat{\sigma}^2 I = \begin{pmatrix} \hat{\Phi} & \hat{\Phi}G' \\ G\hat{\Phi} & G\hat{\Phi}G' \end{pmatrix} + \hat{\sigma}^2 I$$

eftersom vi från ekv (2), (5) och (6) har att

$$(141) \quad \Lambda = \Gamma \Phi \Gamma' + \sigma^2 I$$

Också de saknade observationerna kan skattas från ekv (36) och (37). Om vi saknar observation y_{ij} resp x_{rj} , skattas de med

$$(142) \quad \hat{y}_{ij} = \sum_{l=\ell}^k g_{il} x_{lj}$$

$$(143) \quad \hat{x}_{rj} = x_{rj}$$

6 MONTE-CARLOEXPERIMENT

6.1 Experiment 1

För att illustrera de asymptotiska egenskaperna hos våra skattningar genererades data enligt tvåfaktormodellen med fem testvariabler:

$$x_{1j} = \mu_{1j} + \delta_{1j}$$

$$x_{2j} = \mu_{2j} + \delta_{2j}$$

$$(144) \quad y_{1j} = \gamma_{11} \mu_{1j} + \gamma_{12} \mu_{2j} + \epsilon_{1j}$$

$$y_{2j} = \gamma_{21} \mu_{1j} + \gamma_{22} \mu_{2j} + \epsilon_{2j}$$

$$y_{3j} = \gamma_{31} \mu_{1j} + \gamma_{32} \mu_{2j} + \epsilon_{3j}$$

Faktorerna var icke-stokastiska och antalet observationer, n , var 100. Residualvariansen, σ^2 , sattes lika med 1.

Följande uppsättning av faktorladdningar användes:

$$\gamma_{11} = .8, \gamma_{12} = -.8, \gamma_{21} = .8, \gamma_{22} = .8, \gamma_{31} = 1.2, \gamma_{32} = -.6$$

Ett sammanfattande mått på storleken av faktorerna ges av

$$(145) \quad \Phi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j \mu_j'$$

Två modeller användes i detta experiment:

$$\text{Modell A: } \phi_{11} = 6.63, \phi_{12} = 1.57, \phi_{22} = 6.70$$

$$\text{Modell B: } \phi_{11} = 4.24, \phi_{12} = 1.01, \phi_{22} = 4.29$$

Faktorerna svarar för 90 % av den totala variansen i modell A och 84 % i modell B.

Tio fall med olika proportioner av ofullständiga data på de fem testvariablerna enligt tabell 1, undersöktes för båda modellerna.

Tabell 1

% saknade observationer på	Fall									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ_1	0	10	20	0	30	10	40	20	50	30
ξ_2	0	10	20	10	30	20	40	30	50	40
n_1	0	10	20	20	30	30	40	40	50	50
n_2	0	10	20	30	30	40	40	50	50	60
n_3	0	10	20	40	30	50	40	60	50	70

Vi observerar, att på grund av villkoren att matriserna $D_j + r'C_jr$ skall vara icke-singulära måste vi ha värden på minst två av de fem testvariablerna för varje observation. Med undantag för denna restriktion genererades bortfallet slumpmässigt.

För alla de tio ovan nämnda fallen av ofullständighet genererades 100 stickprov och följande storheter beräknades:

- 1) Medelvärden av laddningarna
- 2) Teoretisk kovariansmatris för laddningarna
- 3) Kovariansmatris från stickproven för laddningarna
- 4) Simultana konfidensintervall för medelvärdena av laddningarna från den teoretiska kovariansmatrisen enligt Scheffé (1959) på 5 %-nivån. Konfidensintervallet för t ex medelvärdet av g_{11} blir då

$$y_{11} \pm \sqrt{\chi_{0.95}^2(6) \sigma_{11}/100}$$

där vi låter Σ beteckna den teoretiska kovariansmatrisen för faktorladdningarna.

- 5) Medelvärden av $\hat{\Phi}$
- 6) Medelvärde och varians för skattad residualvarians
- 7) En χ^2 -teststorhet för att testa hypotesen att den teoretiska kovariansmatrisen ges av ekv (104) enligt Anderson (1958). Detta test förutsätter normalfördelade variabler och vi rekapitulerar att enligt avsnitt 5.4 var den asymptotiska fördelningen för laddningarna normal. Teststorheten är asymptotiskt χ^2 -fördelad med 21 frihetsgrader.

Resultaten från detta experiment ges i tabellerna A och B.

Från tabellerna ser vi att kovariansmatrisen från stickproven överensstämmer ganska väl med den teoretiska kovariansmatrisen. Vid χ^2 -testet, för att testa hypotesen att den teoretiska kovariansmatrisen ges av ekv (104), förkastas vid signifikansnivån 5 % nollhypotesen endast i ett fall. Medelvärdena av faktorladdningarna ligger nära de sanna laddningarna och nästan alltid inom de simultana konfidensintervallen. Residualvariansen tycks alltid underskattas något. I fallen med stort bortfall ser vi att elementen i $\hat{\Phi}$ överskattas. Det visar sig också att om man i en Taylorutveckling av $\hat{\Phi}$ tar hänsyn till termer av storleksordning $1/n$ blir i fall 10 den relativa skevheten ca 10 %. Sammanfattningsvis kan vi säga, att de asymptotiska egenskaperna för våra skattningar enligt kapitel 5 tycks gälla approximativt även för måttligt stora stickprov.

6.2 Experiment 2

I detta experiment vill vi illustrera de asymptotiska egenskaperna hos våra skattningar, när faktorerna är stokastiska. Data genererades enligt (145). Antalet observationer, n , var 100 och residualvariansen, σ^2 , var 1. Faktorladdningarna var desamma som i experiment 1, dvs:

$$\gamma_{11} = .8, \gamma_{12} = -.8, \gamma_{21} = .8, \gamma_{22} = .8, \gamma_{31} = 1.2, \gamma_{32} = -.6$$

Faktorerna var normalfördelade med medelvärden 0 och andramoment:

$$\phi_{11} = 6.25 \quad \phi_{12} = 1.5625 \quad \phi_{22} = 6.25$$

Faktorerna svarar för 88 % av den totala variansen.

Fall 1, 4, 6 och 8 enligt tabell 1 undersöktes och samma storheter som i experiment 1 beräknades. Resultaten återges i tabell C. Vi ser att även med stokastiska faktorer tycks de asymptotiska egenskaperna för våra skattningar enligt kapitel 5 gälla approximativt för en måttlig stickprovsstorlek.

63 Experiment 3

Vi vill här illustrera möjligheten av skeva skattningar vid användning av skattningsmetod ii) i kapitel 1, vid vilken kovariansen mellan två variabler skattas genom att endast använda de för de två variablerna gemensamma observationerna. Från experiment 1 utvaldes två fall av ofullständiga data, fall 4 och 6 (se tabell 1), båda från modell A. Resultaten återges i tabell 2 resp 3 och kan jämföras med resultaten i tabell A4 resp A6.¹⁾

Tabell 2

Fall 4		
Laddning	Medelvärde	Varians. 10^3
γ_{11}	.837	4.77
γ_{12}	-.828	5.21
γ_{21}	.749	5.57
γ_{22}	.771	5.22
γ_{31}	1.097	4.87
γ_{32}	-.576	8.00

1) Dataprogrammen skrevs och kördes med hjälp av F.K.Henriette Weibull.

Tabell 3

Fall 6

Laddning	Medelvärde	Varians. 10^3
γ_{11}	.700	4.50
γ_{12}	-.830	6.48
γ_{21}	.779	6.66
γ_{22}	.862	6.84
γ_{31}	1.010	5.39
γ_{32}	-.748	10.18

Från tabellerna ser vi att skevheten i skattningarna vid denna metod är betydligt större än vid vår metod. Den största skevheten är i tabell 2 ca 8 % och i tabell 3 ca 25 %, medan den största relativa skevheten i tabellerna A4 och A6 är 2 %.

Beteckningar i tabell A, B och C:

$\hat{\sigma}^2$ = skattning av teoretisk residualvarians

$\bar{\sigma}^2$ = medelvärde av de skattade residualvarianserna (från 100 stickprov)

S^2 = stickprovsvariansen för $\hat{\sigma}^2$

$V(\hat{\sigma}^2)$ = asymptotisk teoretisk varians för $\hat{\sigma}^2$

Σ = teoretisk kovariansmatris för laddningarna

$\bar{\Sigma}$ = stickprovskovariansmatris för laddningarna

χ^2 = teststorheten för att testa hypotesen att kovariansmatrisen för laddningarna är lika med Σ med 21 frihetsgrader. Kritiskt värde på 5%-nivån är 32,67. Signifikant värde på teststorheten markeras med *.

$\bar{\phi}$ = medelvärde av $\hat{\phi}$ (från 100 stickprov)

I tabellerna finns i de olika raderna följande:

(1) = testvariabel

(2) = %bortfall

(3) = faktorladdning

(4) = medelvärde av de skattade laddningarna

(5) = konfidensintervall kring den sanna laddningen för medelvärdet av de skattade laddningarna.

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	0	0	0	0

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.801	-.818	.797	.803	1.198	-.616
(5)	$\pm .022$	$\pm .022$	$\pm .022$	$\pm .022$	$\pm .024$	$\pm .024$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 3.8 & -.9 & .0 & .0 & 2.4 & -.6 \\ & 3.8 & .0 & .0 & -.6 & 2.4 \\ & & 3.8 & -.9 & .8 & -.2 \\ & & & 3.8 & -.2 & .8 \\ & & & & 4.7 & -1.1 \\ & & & & & 4.7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.73 & 1.58 \\ & 6.66 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.4 & -1.0 & -.6 & .1 & 2.2 & -.4 \\ & 4.3 & .0 & .7 & -.7 & 3.0 \\ & & 4.0 & -.9 & .6 & -.7 \\ & & & 4.2 & .0 & 1.5 \\ & & & & 3.7 & -1.7 \\ & & & & & 6.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .978 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0068 \\ S^2 &= .0045 \\ \chi^2 &= 31.4 \end{aligned}$$

Tabell A 2

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	10	10	10	10	10

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.813	-.812	.794	.805	1.218	-.620
(5)	$\pm .024$	$\pm .024$	$\pm .023$	$\pm .024$	$\pm .027$	$\pm .027$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 4.6 & -.8 & .0 & -.1 & 2.9 & -.5 \\ & 4.4 & .0 & .0 & -.5 & 2.8 \\ & & 4.2 & -1.2 & .9 & -.3 \\ & & & 4.7 & -.3 & 1.0 \\ & & & & 5.9 & -1.4 \\ & & & & & 5.6 \end{bmatrix}$$

$\bar{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 6.61 & 1.60 \\ & 6.60 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 4.1 & -.6 & -.3 & -.5 & 2.7 & -.1 \\ & 4.5 & .0 & .1 & .2 & 3.3 \\ & & 4.7 & -.6 & .4 & -.1 \\ & & & 4.8 & -.4 & .6 \\ & & & & 5.4 & -1.4 \\ & & & & & 6.7 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .974$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0082$

$S^2 = .0055$

$\chi^2 = 20.5$

Tabell A 3

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	20	20	20	20	20

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.810	-.798	.800	.795	1.223	-.598
(5)	$\pm .027$	$\pm .027$	$\pm .027$	$\pm .026$	$\pm .028$	$\pm .029$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 5.6 & -1.3 & -.2 & .1 & 2.9 & -.7 \\ & 5.6 & .1 & -.1 & -.7 & 3.5 \\ & & 5.9 & -1.6 & .5 & -.2 \\ & & & 5.4 & -.2 & 1.0 \\ & & & & 6.3 & -1.5 \\ & & & & & 6.6 \end{bmatrix}$$

$\bar{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 6.56 & 1.59 \\ & 6.71 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 5.2 & -1.2 & -.3 & .3 & 3.3 & -.7 \\ & 6.8 & -.8 & -.3 & -.5 & 3.9 \\ & & 5.3 & -2.4 & .8 & -.7 \\ & & & 6.5 & -.2 & 1.2 \\ & & & & 7.6 & -2.0 \\ & & & & & 7.0 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .976$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0103$

$S^2 = .0078$

$\chi^2 = 15.3$

Tabell A 4

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	10	20	30	40

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.800	-.808	.805	.804	1.188	-.612
(5)	$\pm .024$	$\pm .024$	$\pm .028$	$\pm .028$	$\pm .030$	$\pm .030$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 4.6 & -.8 & -.2 & .0 & 2.3 & -.6 \\ & 4.6 & .0 & -.3 & -.6 & 2.4 \\ & & 6.0 & -1.5 & .7 & -.2 \\ & & & 6.2 & -.2 & .8 \\ & & & & 7.3 & -1.9 \\ & & & & & 7.2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.71 & 1.52 \\ & 6.68 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.9 & -.7 & -.6 & -.6 & 1.8 & -.3 \\ & 4.5 & .9 & -.2 & -.1 & 2.8 \\ & & 6.2 & -.8 & .4 & -.6 \\ & & & 6.0 & .4 & .5 \\ & & & & 5.4 & -1.1 \\ & & & & & 8.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .978 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0103 \\ S^2 &= .0068 \\ \chi^2 &= 21.0 \end{aligned}$$

Tabell A 5

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	30	30	30	30	30

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.810	-.810	.791	.809	1.225	-.619
(5)	$\pm .032$	$\pm .029$	$\pm .032$	$\pm .034$	$\pm .036$	$\pm .035$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 8.2 & -1.4 & -.6 & .3 & 4.9 & -.9 \\ & 6.6 & .3 & -.2 & -.9 & 4.7 \\ & & 8.2 & -1.6 & .6 & .0 \\ & & & 9.3 & .0 & 1.4 \\ & & & & 10.5 & -1.4 \\ & & & & & 9.9 \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.69 & 1.67 \\ & 6.78 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 9.0 & -1.4 & -.9 & 1.0 & 5.1 & -1.1 \\ & 7.4 & .7 & .7 & -1.3 & 5.9 \\ & & 5.5 & -1.8 & -.8 & .1 \\ & & & 9.3 & 1.2 & 2.3 \\ & & & & 10.6 & -1.8 \\ & & & & & 13.4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .979 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0138 \\ S^2 &= .0086 \\ \chi^2 &= 21.6 \end{aligned}$$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	10	20	30	40	50

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.790	-.804	.812	.800	1.194	-.603
(5)	$\pm .028$	$\pm .029$	$\pm .034$	$\pm .032$	$\pm .036$	$\pm .036$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 6.1 & -1.3 & -.1 & .0 & 3.2 & -.5 \\ & 6.6 & .0 & -.6 & -.4 & 4.0 \\ & & 9.4 & -2.2 & .8 & -.2 \\ & & & 8.3 & -.3 & .0 \\ & & & & 10.2 & -.9 \\ & & & & & 10.1 \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.76 & 1.61 \\ & 6.85 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4.9 & -.3 & -.1 & -.6 & 1.9 & .4 \\ & 6.4 & -.2 & .9 & .2 & 4.2 \\ & & 7.8 & -2.7 & -.4 & -.1 \\ & & & 6.6 & -.7 & .8 \\ & & & & 8.3 & .4 \\ & & & & & 10.7 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .984 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0138 \\ S^2 &= .0106 \\ \chi^2 &= 23.7 \end{aligned}$$

Tabell A 7

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	40	40	40	40	40

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.817	-.802	.795	.787	1.223	-.600
(5)	$\pm .040$	$\pm .038$	$\pm .044$	$\pm .042$	$\pm .040$	$\pm .043$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 12.7 & -2.1 & -2.8 & 1.0 & 7.7 & -1.4 \\ & 11.5 & .3 & .8 & -1.5 & 7.1 \\ & & 15.1 & -5.6 & -.5 & -.7 \\ & & & 14.2 & -.1 & 2.6 \\ & & & & 12.8 & -3.9 \\ & & & & & 14.7 \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.67 & 1.71 \\ & 6.94 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 8.3 & -1.0 & -3.7 & .4 & 5.5 & -1.4 \\ & 13.6 & .1 & .7 & -2.3 & 9.6 \\ & & 12.3 & -4.6 & -1.1 & -.6 \\ & & & 14.1 & -1.1 & 3.3 \\ & & & & 11.0 & -5.6 \\ & & & & & 19.3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .983 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0213 \\ S^2 &= .0186 \\ \chi^2 &= 25.1 \end{aligned}$$

Tabell A 8

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	20	30	40	50	60

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.787	-.809	.807	.820	1.200	-.615
(5)	$\pm .035$	$\pm .033$	$\pm .041$	$\pm .042$	$\pm .046$	$\pm .051$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 9.8 & -3.1 & -1.1 & .5 & 3.9 & -.5 \\ & 8.7 & .3 & -1.7 & -1.2 & 4.6 \\ & & 13.2 & -.2 & .4 & .5 \\ & & & 13.8 & 1.1 & -1.0 \\ & & & & 16.7 & -9.8 \\ & & & & & 21.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 6.82 & 1.58 \\ & 6.85 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10.3 & -3.5 & -1.3 & .9 & 3.3 & 1.3 \\ & 9.4 & .5 & -.9 & -2.0 & 5.6 \\ & & 10.8 & .8 & .6 & .0 \\ & & & 15.6 & -1.5 & 2.8 \\ & & & & 18.8 & -9.7 \\ & & & & & 21.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .951 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0213 \\ S^2 &= .0178 \\ \chi^2 &= 16.2 \end{aligned}$$

Tabell A 9

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	50	50	50	50	50

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.823	-.824	.794	.794	1.254	-.642
(5)	$\pm .055$	$\pm .060$	$\pm .044$	$\pm .055$	$\pm .047$	$\pm .050$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 23.8 & -8.2 & -2.7 & 1.8 & 6.5 & -.9 \\ & 28.2 & 2.3 & -1.1 & .7 & 14.3 \\ & & 15.6 & -6.9 & 1.7 & .9 \\ & & & 24.2 & 1.5 & 1.7 \\ & & & & 17.3 & -2.7 \\ & & & & & 19.6 \end{bmatrix}$$

$\Phi =$

$$\begin{bmatrix} 6.86 & 1.94 \\ & 7.26 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 28.8 & -14.9 & -5.6 & 1.7 & 9.3 & -5.2 \\ & 31.5 & 6.4 & -4.5 & .5 & 15.7 \\ & & 11.9 & -2.4 & 2.4 & 2.4 \\ & & & 20.3 & .7 & -3.0 \\ & & & & 21.8 & -2.2 \\ & & & & & 17.9 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .973$

$V(\bar{\sigma}^2) = .0455$

$S^2 = .0433$

$\chi^2 = 32.9^*$

Tabell A 10

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	30	40	50	60	70

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.795	-.815	.800	.819	1.177	-.610
(5)	$\pm .049$	$\pm .047$	$\pm .053$	$\pm .067$	$\pm .057$	$\pm .051$

$10^3 \Sigma =$

19.4	-2.7	-3.4	1.6	10.5	.0
	17.5	.5	.7	.2	9.1
		22.1	-7.9	-1.1	-.1
			35.9	1.7	3.7
				25.6	-1.2
					20.9

$\Phi =$

7.00	1.65
	7.10

$10^3 \Sigma^- =$

13.7	-1.4	-1.6	2.4	7.0	-.3
	24.6	-1.0	1.0	-.3	15.4
		19.7	-7.6	-2.1	-1.5
			34.0	2.5	3.6
				23.6	-2.9
					27.8

$\sigma^2 = .960$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0455$

$S^2 = .0373$

$\chi^2 = 18.9$

Tabell B 1

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	0	0	0	0

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.803	-.825	.796	.805	1.198	-.621
(5)	$\pm .028$	$\pm .028$	$\pm .028$	$\pm .028$	$\pm .031$	$\pm .031$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 6.1 & -1.4 & .0 & .0 & 3.8 & -.9 \\ & 6.2 & .0 & .0 & -.9 & 3.9 \\ & & 6.1 & -1.4 & 1.3 & -.3 \\ & & & 6.2 & -.3 & 1.3 \\ & & & & 7.5 & -1.8 \\ & & & & & 7.6 \end{bmatrix}$$

$\bar{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 4.33 & 1.02 \\ & 4.26 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 5.4 & -1.5 & -1.0 & .3 & 3.6 & -.6 \\ & 6.8 & .1 & 1.1 & -1.1 & 4.8 \\ & & 6.3 & -1.4 & .8 & -1.2 \\ & & & 6.7 & .2 & 2.3 \\ & & & & 6.0 & -2.6 \\ & & & & & 11.2 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .977$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0068$

$S^2 = .0045$

$\chi^2 = 32.3$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	10	10	10	10	10

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.818	-.817	.792	.808	1.224	-.626
(5)	$\pm .031$	$\pm .030$	$\pm .029$	$\pm .031$	$\pm .035$	$\pm .034$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 7.4 & -1.3 & .0 & -.1 & 4.7 & -.8 \\ & 7.1 & .1 & .0 & -.8 & 4.5 \\ & & 6.7 & -1.9 & 1.4 & -.4 \\ & & & 7.6 & -.4 & 1.6 \\ & & & & 9.5 & -2.2 \\ & & & & & 9.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 4.23 & 1.04 \\ & 4.21 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6.6 & -.9 & -.4 & -.8 & 4.4 & -.3 \\ & 7.3 & .0 & .0 & .4 & 5.3 \\ & & 7.5 & -1.0 & .7 & -.2 \\ & & & 7.8 & -.8 & .9 \\ & & & & 8.8 & -2.3 \\ & & & & & 10.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .973 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0082 \\ S^2 &= .0055 \\ \chi^2 &= 20.3 \end{aligned}$$

Tabell B 3

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	20	20	20	20	20

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.813	-.799	.800	.795	1.229	-.598
(5)	$\pm .034$	$\pm .034$	$\pm .035$	$\pm .033$	$\pm .036$	$\pm .037$

$10^3 \Sigma =$

9.0	-2.0	-.3	.1	4.6	-1.1
	9.1	.1	-.1	-1.1	5.6
		9.5	-2.6	.8	-.3
			8.8	-.2	1.7
				10.1	-2.5
					10.7

$\bar{\Phi} =$

4.20	1.02
	4.31

$10^3 \bar{\Sigma} =$

8.1	-1.9	-.5	.6	5.1	-1.2
	11.1	-1.4	-.5	-.8	6.2
		8.5	-4.0	1.3	-1.2
			10.7	-.4	2.0
				11.9	-3.2
					11.3

$\bar{\sigma}^2 = .976$
 $V(\hat{\sigma}^2) = .0103$
 $S^2 = .0078$
 $\chi^2 = 16.7$

Tabell B 4

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	10	20	30	40

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.800	-.811	.806	.806	1.185	-.615
(5)	$\pm .031$	$\pm .031$	$\pm .035$	$\pm .036$	$\pm .038$	$\pm .039$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 7.4 & -1.2 & -.3 & .0 & 3.7 & -.9 \\ & 7.5 & .0 & -.4 & -.9 & 3.9 \\ & & 9.8 & -2.4 & 1.2 & -.4 \\ & & & 10.1 & -.4 & 1.3 \\ & & & & 11.7 & -3.1 \\ & & & & & 11.8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 4.31 & 0.96 \\ & 4.28 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6.3 & -1.1 & -.9 & -.8 & 2.0 & -.4 \\ & 7.3 & 1.4 & -.4 & -.1 & 4.5 \\ & & 9.7 & -1.3 & .5 & -1.0 \\ & & & 9.8 & .8 & .8 \\ & & & & 9.0 & -1.7 \\ & & & & & 14.3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}^2 = .977$$

$$V(\hat{\sigma}^2) = .0103$$

$$S^2 = .0067$$

$$\chi^2 = 20.4$$

Tabell B 5

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	30	30	30	30	30

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.814	-.815	.788	.813	1.233	-.626
(5)	$\pm .041$	$\pm .037$	$\pm .041$	$\pm .044$	$\pm .046$	$\pm .045$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 13.2 & -2.3 & -1.1 & .5 & 7.9 & -1.5 \\ & 10.6 & .4 & -.3 & -1.4 & 7.7 \\ & & 13.3 & -2.7 & .9 & .0 \\ & & & 15.3 & .1 & 2.3 \\ & & & & 17.0 & -2.2 \\ & & & & & 16.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 4.33 & 1.12 \\ & 4.44 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 14.7 & -2.5 & -1.8 & 1.7 & 8.4 & -2.2 \\ & 12.5 & 1.1 & 1.0 & -2.5 & 10.4 \\ & & 9.0 & -3.2 & -1.5 & .1 \\ & & & 15.3 & 2.0 & 3.8 \\ & & & & 17.8 & -3.5 \\ & & & & & 23.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}^2 = .977$$

$$V(\hat{\sigma}^2) = .0138$$

$$S^2 = .0086$$

$$\chi^2 = 23.6$$

Tabell B 6

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	10	20	30	40	50

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.788	-.807	.816	.799	1.193	-.604
(5)	$\pm .035$	$\pm .037$	$\pm .044$	$\pm .041$	$\pm .046$	$\pm .046$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 9.9 & -2.1 & -.2 & .0 & 5.1 & -.8 \\ & 10.8 & .0 & -.9 & -.6 & 6.5 \\ & & 15.2 & -3.7 & 1.4 & -.4 \\ & & & 13.6 & -.5 & .0 \\ & & & & 16.5 & -1.3 \\ & & & & & 16.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 4.35 & 1.04 \\ & 4.43 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 8.1 & -.4 & -.1 & -1.0 & 3.2 & .8 \\ & 10.4 & -.3 & 1.3 & .4 & 7.0 \\ & & 12.6 & -4.6 & -.7 & -.2 \\ & & & 10.7 & -1.0 & 1.2 \\ & & & & 13.7 & 1.0 \\ & & & & & 17.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .983 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0138 \\ S^2 &= .0107 \\ \chi^2 &= 24.2 \end{aligned}$$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	40	40	40	40	40

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.825	-.803	.791	.787	1.231	-.601
(5)	$\pm .051$	$\pm .048$	$\pm .056$	$\pm .054$	$\pm .051$	$\pm .055$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 20.5 & -3.3 & -4.8 & 1.8 & 12.5 & -2.3 \\ & 18.7 & .4 & 1.4 & -2.4 & 11.4 \\ & & 24.8 & -9.6 & -.9 & -1.2 \\ & & & 23.4 & -.2 & 4.4 \\ & & & & 20.6 & -6.4 \\ & & & & & 24.3 \end{bmatrix}$$

$\bar{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 4.31 & 1.13 \\ & 4.53 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 14.1 & -1.7 & -6.5 & .7 & 9.2 & -2.4 \\ & 22.7 & .4 & .9 & -3.9 & 15.6 \\ & & 21.1 & -8.1 & -2.1 & -.8 \\ & & & 23.2 & -2.1 & 5.7 \\ & & & & 17.9 & -9.9 \\ & & & & & 32.8 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .980$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0213$

$S^2 = .0185$

$\chi^2 = 25.3$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	20	30	40	50	60

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.785	-.812	.811	.828	1.205	-.622
(5)	$\pm .045$	$\pm .042$	$\pm .052$	$\pm .053$	$\pm .058$	$\pm .066$

$10^3 \Sigma =$

15.9	-5.1	-1.9	.8	6.3	-.8
	14.1	.6	-2.9	-1.9	7.6
		21.5	-.4	.6	.9
			22.6	1.8	-1.7
				27.1-16.3	
					35.0

$\bar{\Phi} =$

4.42	1.02
	4.47

$10^3 \hat{\Sigma} =$

16.9	-5.8	-2.4	1.6	5.4	1.9
	15.8	.9	-1.7	-3.1	9.3
		17.7	1.6	.8	.1
			27.3	-2.8	5.7
				31.8-17.0	
					37.2

$$\hat{\sigma}^2 = .948$$

$$V(\hat{\sigma}^2) = .0213$$

$$S^2 = .0176$$

$$\chi^2 = 19.4$$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	50	50	50	50	50

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.833	-.836	.793	.794	1.272	-.656
(5)	$\pm .070$	$\pm .076$	$\pm .056$	$\pm .071$	$\pm .059$	$\pm .064$

$$10^3 \Sigma = \begin{bmatrix} 38.9 & -13.5 & -4.5 & 2.9 & 10.2 & -1.5 \\ & 46.5 & 3.7 & -1.5 & 1.2 & 23.5 \\ & & 25.3 & -11.7 & 2.8 & 1.5 \\ & & & 39.9 & 2.5 & 3.0 \\ & & & & 27.7 & -4.3 \\ & & & & & 32.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 4.41 & 1.18 \\ & 4.68 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 48.3 & -24.9 & -9.4 & 3.2 & 15.1 & -8.5 \\ & 53.7 & 10.2 & -7.7 & 1.3 & 26.6 \\ & & 19.8 & -4.8 & 4.0 & 3.6 \\ & & & 34.9 & 1.1 & -5.4 \\ & & & & 37.0 & -4.4 \\ & & & & & 30.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= .969 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0455 \\ S^2 &= .0433 \\ \chi^2 &= 31.9 \end{aligned}$$

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	30	40	50	60	70

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.795	-.821	.801	.826	1.175	-.616
(5)	$\pm .063$	$\pm .060$	$\pm .068$	$\pm .088$	$\pm .072$	$\pm .065$

$10^3 \Sigma =$

31.6	-4.1	-5.7	2.9	17.2	.1
	28.6	.7	1.5	.4	14.9
		36.5	-14.2	-1.9	-.2
			60.8	3.1	6.5
				41.2	-1.4
					34.0

$\bar{\Phi} =$

4.62	1.13
	4.76

$10^3 \bar{\Sigma} =$

23.4	-1.7	-2.8	2.9	12.7	-1.0
	42.3	-2.2	2.4	-.7	26.8
		32.8	-13.7	-3.3	-3.3
			59.4	3.1	7.3
				39.3	-4.9
					47.3

$\bar{\sigma}^2 = .954$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0455$

$S^2 = .0362$

$\chi^2 = 20.6$

Tabell C 1

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	0	0	0	0

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.789	-.795	.808	.790	1.191	-.585
(5)	$\pm .023$	$\pm .023$	$\pm .023$	$\pm .023$	$\pm .025$	$\pm .025$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 4.1 & -1.0 & .0 & .0 & 2.6 & -.7 \\ & 4.1 & .0 & .0 & -.7 & 2.6 \\ & & 4.1 & -1.0 & .9 & -.2 \\ & & & 4.1 & -.2 & .9 \\ & & & & 5.0 & -1.3 \\ & & & & & 5.1 \end{bmatrix}$$

$\hat{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 6.29 & 1.41 \\ & 6.20 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 4.3 & -.9 & -.4 & .5 & 2.8 & -.2 \\ & 4.4 & -.7 & .3 & -.5 & 2.6 \\ & & 5.5 & -1.7 & .8 & -.9 \\ & & & 3.1 & .8 & 1.1 \\ & & & & 5.8 & -.8 \\ & & & & & 4.5 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .986$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0068$

$S^2 = .0059$

$\chi^2 = 31.3$

Tabell C 2

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	0	10	20	30	40

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.788	-.204	.217	.788	1.210	-.212
(5)	±.028	±.028	±.028	±.028	±.031	±.032

$$10^3 \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 3.3 & -1.3 & -.1 & .0 & 3.6 & -.8 \\ & 3.4 & .0 & -.1 & -.8 & 3.1 \\ & & 6.2 & -1.6 & .8 & -.2 \\ & & & 6.2 & -.2 & .8 \\ & & & & 7.8 & -1.9 \\ & & & & & 8.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 3.14 & 1.53 \\ & 6.40 \end{bmatrix}$$

$$10^3 \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.3 & -1.3 & -.5 & .1 & 3.6 & -1.3 \\ & 4.7 & .7 & .7 & -.4 & 3.1 \\ & & 5.5 & -1.1 & .1 & -1.3 \\ & & & 6.0 & 1.0 & .9 \\ & & & & 8.3 & -1.3 \\ & & & & & 10.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= 1.001 \\ V(\hat{\sigma}^2) &= .0103 \\ \hat{\beta}^2 &= .0094 \\ \chi^2 &= 28.1 \end{aligned}$$

Tabell C 3

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	10	20	30	40	50

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.799	-.798	.816	.781	1.201	.608
(5)	$\pm .029$	$\pm .030$	$\pm .032$	$\pm .032$	$\pm .036$	$\pm .037$

$10^3 \Sigma =$

6.9	-1.7	-.3	.1	3.2	-.8
	7.0	.1	-.3	-.8	3.2
		8.2	-2.2	1.0	-.3
			8.3	-.3	1.0
				10.4	-2.6
					10.8

$\hat{\Phi} =$

6.36	1.57
	6.40

$10^3 \bar{\Sigma} =$

6.0	-1.7	-.8	.7	2.5	-.8
	7.6	-1.3	.2	-.6	4.4
		6.9	-2.3	-.4	-.1
			8.3	.3	.8
				13.2	-2.0
					11.2

$\hat{\sigma}^2 = .979$
 $V(\hat{\sigma}^2) = .0138$
 $S^2 = .0150$
 $\chi^2 = 21.2$

Tabell C 4

(1)	ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	η_3
(2)	20	30	40	50	60

(3)	γ_{11}	γ_{12}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
(4)	.785	-.802	.820	.791	1.181	-.577
(5)	$\pm .036$	$\pm .037$	$\pm .041$	$\pm .042$	$\pm .045$	$\pm .046$

$10^3 \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} 10.5 & -2.6 & -1.3 & .3 & 6.5 & -1.7 \\ & 10.7 & .3 & -1.3 & -1.7 & 6.7 \\ & & 13.6 & -3.7 & .5 & -.1 \\ & & & 13.7 & -.1 & .6 \\ & & & & 16.0 & -3.9 \\ & & & & & 16.7 \end{bmatrix}$$

$\hat{\Phi} =$

$$\begin{bmatrix} 6.43 & 1.41 \\ & 6.39 \end{bmatrix}$$

$10^3 \bar{\Sigma} =$

$$\begin{bmatrix} 9.6 & -2.4 & -3.3 & .6 & 6.1 & -1.2 \\ & 11.7 & -.1 & -3.0 & -.5 & 6.3 \\ & & 16.7 & -8.8 & 1.7 & 1.7 \\ & & & 17.6 & .6 & -3.1 \\ & & & & 16.6 & -1.2 \\ & & & & & 13.9 \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}^2 = .972$

$V(\hat{\sigma}^2) = .0213$

$S^2 = .0183$

$\chi^2 = 39.2^*$

SUMMARY

In factor analysis partially incomplete data often occur. Our problem is to estimate the parameters, in the first place the factor loadings, in the multifactor model with partially incomplete data. For this purpose we will use a method which is based on the model.

In chapter one some earlier used methods for factor analysis with missing observations are discussed. In these methods the covariance matrix of the manifest variables is first estimated and then a standard technique for factor analysis is used on the estimated covariance matrix. Recently, however, Christoffersson (1970b) has developed a method for the one factor model which is based on the assumption that the missing observations are in accordance with the model. For the multifactor case we will use the same assumption.

The theoretical model is presented in chapter two. We assume that the residual variances are equal and that we have no unknown location parameters in the model. Attention is drawn to the fact that it is necessary to impose k^2 restrictions to make the k -factor model unique. For the one factor model with incomplete data Christoffersson (1970b) used the component representation to make the model unique. For the multifactor case it does not seem possible to estimate the loadings in the component representation. We will here follow Wold (1966) where all restrictions are on the loadings and are of a simple form.

In chapter three as an introduction to the following the maximum likelihood method is used when no observations are missing to estimate the parameters of the model, i.e. the factor loadings,

the residual variance and the factor scores. We obtain a non-linear equation system which is the same as in Wold (1966). Wold used the method of least squares to obtain his results. We observe that with other kinds of restrictions, methods of estimation exist which are easier to handle from a numerical point of view.

In chapter four the maximum likelihood method is used for estimation with incomplete data. Our basic assumption is that the missing observations are in accordance with the model. Here some restrictions on the pattern of incompleteness are necessary. Particularly we must have observations for every individual for at least so many variables as the number of factors. A simple iterative technique is proposed for solving the derived nonlinear equations.

The asymptotic properties of the estimators are investigated in chapter five. As the number of parameters increases with the number of observations we cannot rely on the well-known large sample properties of maximum likelihood estimators. We will use the same approach as Christoffersson (1970) did for the one factor model. After some calculations we are able to show that the estimators of the factor loadings are consistent and asymptotically normally distributed. The second order moments for the estimators are derived. The results are valid for non-stochastic factor scores or identically distributed stochastic factor scores with finite second order moments provided that some weak regularity conditions are imposed. The estimator of the residual variance is corrected for an asymptotic bias and its large sample distribution is derived. Consistent estimators for the second order moments of the loadings and for the covariance matrix of the factor scores are proposed.

Finally, the results of two Monte Carlo experiments are presented in chapter six. The first experiment illustrates the large sample properties obtained in chapter five for the two factor model with five manifest variables. The number of observations is 100 and the factors are non-stochastic. Ten cases with different proportions of missing observations on the manifest variables are investigated. The results indicate that the large sample properties seem to be valid even for samples of moderate size. The second Monte Carlo experiment illustrates the possibility of biased estimators of the factor loadings when a method from Veldman (1967) is used. The relative bias of the estimators is found to be significantly higher than the one when our method is used.

REFERENSER

- Andersen, E B (1970): Asymptotic Properties of Conditional Maximum-likelihood Estimators. JRSS ser. B 1970.
- Anderson, T W (1963): Asymptotic Theory for Principal Component Analysis. AMS 1963.
- Anderson, T W (1958): An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York 1958.
- Anderson, T W och Rubin, H (1956): Statistical inference in factor analysis. Proc. of the Third Berkeley Symposium on Math.Stat. and Probability Vol V. University of California Press, Berkeley 1956.
- Cramér, H (1946): Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, Princeton 1946.
- Christoffersson, A (1970 a): The Multifactor Model with Incomplete Data. Part I: Theoretical. Stencil.
- Christoffersson, A (1970 b): The One Component Model with Incomplete Data. Gradualavhandling, Uppsala 1970.
- Davidson, R R och Lever, W E (1970): The Limiting Distribution of the Likelihood Ratio-Statistics under a Class of Local Alternatives. Sankhyā ser A 1970.
- Graybill, F A (1969): Introduction to Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth, Belmont 1969.
- Horst, P (1965): Factor Analysis of Data Matrices. Holt, Rinehart and Winston, New York 1965.
- Jöreskog, K G (1963): Statistical Estimation in Factor Analysis. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1963.
- Kalbfleisch, J D och Sprott, D A (1970): Application of Likelihood Methods to Models Involving Large Numbers of Parameters. JRSS ser B 1970.
- Neyman, J och Scott, E L (1948): Consistent Estimates Based on Partially Consistent Observations. Econometrica 1948.

- Rao, C R (1965): Linear Statistical Inference and its Applications. New York 1965.
- Scheffé, H (1959): The Analysis of Variance. Wiley, New York 1959.
- Timm, N H (1970): The Estimation of Variance-Covariance and Correlation Matrices from Incomplete Data. Psychometrika 1970.
- Veldman, D J (1967): Fortran Programming for the Behavioural Sciences. Holt, Rinehart and Winston, New York 1967.
- Wold, H (1966): Nonlinear Estimation by Iterative Least Square Procedures. Ingår i Festschrift for J Neyman, Wiley, New York 1966.

